

♦♦♦
DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3EPREUVE **MATHEMATIQUES**♦♦♦
Mr ABIDI FaridDurée **3h**

Date: 14-05-2010

Exercice 1 : (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justifier**, la réponse qui lui correspond.

1. Si X suit la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, 1]$ alors $P(0,2 \leq X \leq 0,92) =$

- a) 0,7 ; b) 0,72 ; c) 0,9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ est :

- a) $\frac{1}{(1+e^{-x})^2}$; b) $\ln(1+e^{-x})$; c) $\ln(1+e^x)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) =$

- a) 0 ; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

Exercice 2: (4 points)

La durée d'attente T , en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

- calculer la probabilité qu'un automobiliste attende plus que 2 minutes.
- Calculer la probabilité qu'un automobiliste attende moins de 5 minutes.
- Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelles est la probabilité que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes.

Exercice 3: (4 points)

On considère les fonctions f définies, dérivables et non nulles sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y^2 - 6y$.

1. On pose $z = \frac{1}{y}$.

Montrer que z est solution de l'équation (E') : $z' = 6z - 2$.

2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions non nulles de (E).

4. Déterminer f la solution de (E) qui vérifie $f(\ln 2) = 1$.

Exercice 4: (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, -1, 4)$,

$B(7, -1, -2)$, $C(1, 5, -2)$ et $D(4, 0, -1)$.

1. a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

b) Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

d) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

e) En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation du plan (ABC).

2. a) calculer la distance du point D au plan (ABC).

b) déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

3. Soit $G(3, 1, 0)$ et Soit (S) la sphère de centre G et passant par A.

a) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S).

b) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et du plan (ABC).

Exercice 5 : (4 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur du textile en France, entre 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de milliers d'emplois salariés y_i	118	113	106	98	89	81	75

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (**unités graphiques** : 1 cm pour 1 rang en abscisse et 1 cm pour 10 milles emplois en ordonnée).

Calculer les coordonnées du point moyen G puis placer G .

2. On pose $z = \ln y$.

- a. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	4,771						

- b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millième).
- c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = Ae^{Bx}$, A étant arrondi l'unité et B au millième.

3. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008.

CORRIGE**Exercice 1 :**

1. **b)** ; 2. **c)** ; 3. **a)**

Exercice 2 :

1. La probabilité qu'un automobiliste attende plus de 2 minutes est :

$$P(X > 2) = e^{-\frac{1}{6} \cdot 2} = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,7165.$$

2. La probabilité qu'un automobiliste attende moins de 5 minutes est :

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{1}{6} \cdot 5} = 1 - e^{-\frac{5}{6}} \approx 0,5654.$$

3. La probabilité qu'un automobiliste attende moins de 5 minutes sachant qu'il a attendu plus de 2 minutes est :

$$P_{(X>2)}(X \leq 5) = \frac{P((X \leq 5) | (X > 2))}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X \leq 5)}{P(X > 2)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}} - e^{-\frac{5}{6}}}{e^{-\frac{1}{3}}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,3935$$

Exercice 3 :

1. Soit $z = \frac{1}{y}$, comme y est une fonction définie, dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$ alors z est

dérivable sur $\mathbb{R}$ et on $z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2}$.

Or y est solution de (E), donc $z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{2y^2 - 6y}{y^2} = -2 + 6\frac{1}{y} = 6z - 2$.

Ainsi, z est solution de l'équation différentielle (E') : $z' = 6z - 2$.

2. (E') $\Leftrightarrow z' = 6z - 2 \Leftrightarrow z = ke^{6x} + \frac{1}{3}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{ke^{6x} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{3ke^{6x} + 1}$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Soit f la solution de (E) qui vérifie $f(\ln 2) = 1$.

On a pour tout x réel, $f(x) = \frac{3}{3ke^{6x} + 1}$ où k est un réel.

$$\begin{aligned} \text{Or } f(\ln 2) = 1 &\Leftrightarrow \frac{3}{3ke^{6\ln 2} + 1} = 1 \Leftrightarrow 3ke^{6\ln 2} + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow 3ke^{\ln(2^6)} = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^6 \cdot k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3 \cdot 2^6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

Par suite : pour tout x réel, $f(x) = \frac{3}{\frac{1}{32}e^{6x} + 2} = \frac{96}{e^{6x} + 64}$.

Exercice 4 :

1. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan.

c) On a : $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$ donc le triangle ABC est équilatéral.

d) Un vecteur normal au plan (ABC) est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à

(ABC).

e) Une équation du plan (ABC) est : $x + y + z + d = 0$ où d est un réel.

Comme A(1, -1, 4) est un point de (ABC) alors $1 - 1 + 4 + d = 0$ d'où $d = -4$.

Ainsi : (ABC) : $x + y + z - 4 = 0$.

2. a) La distance du point D(4, 0, -1) au plan (ABC) est $d(D, (ABC)) = \frac{|4 + 0 - 1 - 4|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{3 \times 36^2} = 36\sqrt{3}$

donc le volume du tétraèdre ABCD est $V = \frac{1}{3} d(D, (ABC)) \cdot \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 36\sqrt{3} = 12$.

3. a) Le rayon de la sphère (S) de centre G(3, 1, 0) et passant par A est

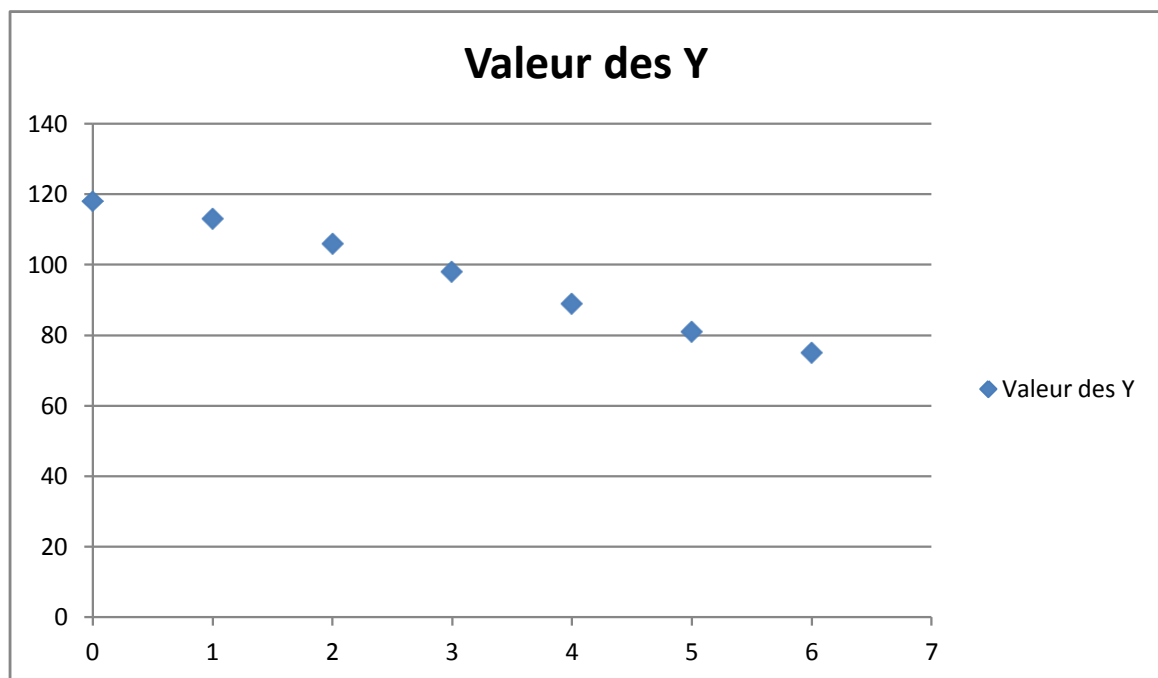
$$GA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ donc une équation de la sphère (S) est } (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24.$$

$$b) d(G, (ABC)) = \frac{|3+1+0-4|}{\sqrt{3}} = 0 \text{ donc } G \in (ABC).$$

Il en résulte que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un grand cercle ($\mathcal{C}$) de centre G et de rayon $2\sqrt{6}$.

Exercice 5 :

1.



2. on pose $z = \ln y$.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	4,771	4,727	4,663	4,585	4,489	4,394	4,317

b) Une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $z = -0,079.x + 4,8$.

c) Pour tout $y > 0$, $z = \ln y \Leftrightarrow y = e^z \Leftrightarrow y = e^{4,8-0,079.x} \Leftrightarrow y = e^{4,8} \cdot e^{-0,079.x}$

D'où $y = 122e^{-0,079.x}$.

3. Le rang de l'année 2008 est 8 d'où une estimation du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008 : $y = 122e^{-0,079.8} \approx 64,8$

On peut prévoir 65 milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008.