Lycée Ibn Khaldoun - RADES Mr ABIDI Farid	BAC BLANC - Mai 2008 Mathématiques	Classe : 4 M_1 Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles A, B et C.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte 0,25 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point.

L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

On considère la série statistique suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	140	167	220	240	260	310

On suppose que la forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. On note (D) cette droite d'équation $y = 33x + b$

Question		Réponse
1) La droite D passe par le point de coordonnées :	A	(2,5 ; 230)
	B	(2,5 ; 270)
	C	(2,5 ; 222, 5)
2) La droite passant par les points $M_2(1\,;18)$ et $M_5(4;30)$ a pour équation $y = 4x + 14$ donc la somme $\sum_{i=1}^{6}(y_i - 4x_i - 14)^2$ est :	A	supérieure à $\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - 33x_i - b\right)^2$
	B	inférieure à $\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - 33x_i - b\right)^2$
	C	égale à $\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - 33x_i - b\right)^2$
3) Au rang $x = 7$ une estimation, de y_7 est :	A	$y = 371$
	B	$y = 317$
	C	$y = 366$
4) Une valeur approchée à 0,1 prés de la covariance cov (x ; y) de cette série est :	A	217,5
	B	96,58
	C	$\sqrt{96,58}$

Recopier la grille ci-dessous et la compléter par Vrai ou faux. Aucune justificaton n'est demandée.

Question	Réponce A	Réponce B	Réponce C
1			
2			
3			
4			

Exercice 2 : (4 points)

Un technicien a été chargé d'étudier le fonctionnement d'un certain type A de pièces. Après mesure de la durée de vie en jours d'un certain nombre de ces pièces, il en est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire X qui à chaque pièce de type A associe sa durée de vie en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

1. Sachant que P(X > 200) = 0,247, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,007.

2. On admet dans la suite de l'exercice que le paramètre de la loi vaut : $\lambda = 0{,}007$
   a) Calculer la probabilité qu'une pièce de type A ait une durée de vis inférieure à 500 jours ?
   b) Calculer la probabilité qu'une pièce de ce type soit encore en fonctionnement au bout de 500 jours.
   c) Sachant qu'une pièce de ce type a déjà fonctionné 200 jours, quelle est la probabilité qu'elle ait une durée de vie supérieure à 500 ?

3. On considère 10 pièces de type A fonctionnant de façon indépendante.

   Déterminer la probabilité p qu'au moins une pièce de ce type ait une durée de vie supérieure à 200 jours.

Exercice 3 : (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' = 2y$.

3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0) .

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 4 : (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne :

- les points A (1 ; –2 ; 1) , B (2 ; –1 ; 3) , C(1 ;1 ;4) et H(0 ; 0 ; 2) .
- la droite (Δ) définie par : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par les points A , B et C.

2) a- Démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) en H.

b- Démontrer que H est équidistant de A , B et C.

c- Ecrire un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle $\widehat{AHB}$.

3) Soit M un point variable de (Δ) et E(2 ; 2 ; 0) un point fixe de (Δ).

Pour quelles valeurs de t le volume du tétraèdre MABC est - il égal au double de celui du tétraèdre EABC ?

Exercice 5 : (5 points)

1) On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_1(x)=2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$.

a- Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b- Déterminer la dérivée de f_1 .

c- Dresser le tableau de variations de f_1 .

2) Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$.

a- Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b- Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c- Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $[0\,;+\infty[$

d- Justifier que, pour tout entier naturel n, $0<\alpha_n<1$.

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>0$.

4) a- Montrer que la suite $\left(\alpha_n\right)$ est croissante.

b- En déduire qu'elle est convergente.

c- Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Correction

EXERCICE 1 – 3 points

1. La droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés passe par le point moyen G (2,5 ; 222,5)

2. La droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés est la droite d'équation telle que

la somme des carrés des résidus est minimale. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{6}(y_i - 4x_i - 10)^2 \text{ est supérieure à } \sum_{i=1}^{6}\left(y_i - \frac{27}{7}x_i - b\right)^2$$

3. Les coordonnées du point moyen vérifient l'équation de la droite D alors

$$33 \times 2,5 + b = 222,5 \Leftrightarrow b = 140$$

Par conséquent la droite D a pour équation $y = 33.x + 140$ d'où si $x = 7$ une estimation, de y

est : $33 \times 7 + 140 = 371$

4. La covariance peut être calculée à l'aide d'une des deux formules suivantes :

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 2,5)(y_i - 222,5) = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i y_i\right) - 2,5 \times 222,5 \simeq 96,58$$

Question	Réponce A	Réponce B	Réponce C
1	Faux	Faux	Vrai
2	Vrai	Faux	Faux
3	Vrai	Faux	Faux
4	Faux	Vrai	Faux

EXERCICE 2 – 4 points

1. $p(X > 200) = 0,247 \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = 0,247 \Leftrightarrow -200\lambda = \ln(0,247) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(0,247)}{-200} \approx 0,007$.

2. a) La probabilité qu'une pièce du type A ait une durée de vie inférieure à 500 jours

est $p(X \leqslant 500) = 1 - e^{-0,007 \times 500} \approx 0,970$.

b) La probabilité qu'une pièce du type A ait une durée de vie supérieure à 500 jours

$p(X > 500) = 1 - p(X \leqslant 500) \approx 0,030$.

3. Comme X suit la loi de durée de vie , la probabilité qu'une pièce du type A ait une durée de vie supérieure à 500 jours sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 200 jours est égale à la probabilité qu'une pièce du type A ait une durée de vie supérieure à 300 jours ,

soit $p(X > 300) = e^{-0,007\times 300} \approx 0,122$.

Autre solution : en utilisant des probabilités conditionnelles

On doit calculer $p_{(X>200)}(X > 500)$.

Comme l'intersection des évènements (X>200) et (X>500) est l'évènement (X> 500)

alors , $p_{(X>200)}(X > 500) = \dfrac{p(X>500)}{p(X>200)}$. Or $p(X>500) = e^{-500\lambda}$ et $p(X>200) = e^{-200\lambda}$.

On a donc bien $p_{(X>200)}(X > 500) = \dfrac{e^{-500\lambda}}{e^{-200\lambda}} = e^{-300\lambda} = e^{-0,007\times 300} \approx 0,122$.

4. On a un schéma de Bernouilli avec comme succès le fait qu'une pièce de ce type ait une durée de vie supérieure à 200jours et 10 répétitions. Si on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de pièces ayant une durée de vie supérieure à 200 jours, Y suit la loi binomiale de paramètres 10 et $p(X>200) = 0,247$.

La probabilité cherchée est donc

$p = p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - 0,247)^{10} = 1 - 0,753^{10} \approx 0,941$.

EXERCICE 3 – 4 points

(E) : $y'=2y+\cos x$

1. $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$.

f_0 somme de fonctions dérivables est dérivable et $f'_0(x)=-a\sin x+b\cos x$.

f_0 est solution de (E) si et seulement si : quel que soit x réel.

$f'_0(x)=2f_0(x)+\cos x \Leftrightarrow -a\sin x+b\cos x=2(a\cos x+b\sin x)+\cos x$

$$\Leftrightarrow (a+2b)\sin x+(2a-b+1)\cos x=0$$

En particulier pour $x=0$ et pour $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} 2a-b+1 = 0 \\ a+2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b = -1 \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b = -1 \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{5} \\ a = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Conclusion : $f_0(x)=-\dfrac{2}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x$.

2. D'après **1. a.** toute solution de l'équation différentielle $(E_0): y'=2y$ est de la forme $f(x)=e^{2x}$.

3. Si f est solution de (E) et comme f_0 est aussi solution de (E), on a :

$$\begin{cases} f'(x) = 2f(x)+\cos x \\ f'_0(x) = 2f_0(x)+\cos x \end{cases}$$

D'où par différence membres à membres $f'(x)-f'_0(x)=2\big(f(x)-f_0(x)\big)=0$ ou par linéarité de la dérivabilité : $\big(f(x)-f_0(x)\big)'=2\big(f(x)-f_0(x)\big)$ ce qui signifie que $f(x)-f_0(x)$ est solution de (E_0).

Si $f(x)-f_0(x)$ est solution de (E_0) alors on a $\big(f(x)-f_0(x)\big)'=2\big(f(x)-f_0(x)\big)$

D'où $f'(x)-2f(x)=f'_0(x)-2f_0(x)=\cos x$
Par conséquent, $f'(x)-2f(x)=\cos x$
Donc *f* est solution de (E).

Conclusion : *f* est solution de (E) si et seulement si $f-f_0$ est solution de (E_0).

4. D'après **2. b.**, on a donc $f(x)-f_0(x)=Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x+Ke^{2x}$.

5. k est solution de (E), donc $k(x)=-\dfrac{2}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x+Ke^{2x}$.

Or $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}+Ke^{\pi} \Leftrightarrow K=-\dfrac{1}{5}e^{-\pi}$.

On a donc $k(x)=-\dfrac{2}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x-\dfrac{1}{5}e^{2x-\pi}$.

EXERCICE 4 – 4 points

1. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

Une équation du plan (P) est : $-3x - 3y + 3z + d = 0$ où d est un réel.

Comme A(1, -2, 1) est un point de (P) alors $d = -6$. Ainsi (P) : $x + y - z + 2 = 0$

2a $\overrightarrow{V}_{\Delta}$ un vecteur de (Δ) est un vecateur normal à (P) donc (Δ) est perpendiculaire à (P).

Intersection de (Δ) et (P) : $t + t + t - 2 + 2 = 0$ donc $t = 0$; il en résulte que (Δ) coupe (P) au point H(0; 0 ; 2).

2b $\overrightarrow{HA} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{HB} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{HC} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ donc $HA = HB = HC = \sqrt{6}$.

2c HAB est isocèle en H , $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$; $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur

de la bissectrice de lángle $\widehat{AHB}$. (Δ) : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

►Ou : W(3/2 ; – 3/2 ; 2) est le milieu du segment; $\overrightarrow{HW} \begin{vmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ est vecteur directeur

de la bissectrice de lángle $A\widehat{H}B$.

$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ donc $\vec{u} = \dfrac{2}{3} \overrightarrow{HW}$ est aussi un vecteur directeur de la bissectrice (Δ)

3 $V(MABC) = \dfrac{1}{3} MH \times Aire(ABC)$; $V(EABC) = \dfrac{1}{3} EH \times Aire(ABC)$

$V(MABC) = 2V(EABC)$ équivaut à $MH = 2\,EH$ ou encore $MH^2 = 4EH^2$

par suite $3t^2 = 48$ donc $t^2 = 16$. Ainsi $t = -4$ ou $t = 4$.

EXERCICE 5 – 5 points

1. **a.** $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$.

On a $\lim_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)=+\infty$, et on a $\lim_{x\to+\infty} 2x-2$.

Finalement par somme des limites $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$.

b. f_1 est une somme de fonctions dérivables et $f'_1(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

c. On a $2x\geqslant 0, x^2+1>0$, donc $\dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc $f'_1(x)\geqslant 2>0$.

La fonction est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$f_1(0)=-2$

D'où le tableau de variation :

x	0	α_1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	0	$+\infty$

2. $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

a. Pour n fixé, on a encore $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}=+\infty$, et donc $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

b. $f'_n(x)=2+\dfrac{2x}{n(x^2+1)}$.

Comme à la question 1, tous les termes sont positifs, donc $f'_n(x)>0$.

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Comme $f(0)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$ il existe un réel unique α_n appartenant à

$[0\,;+\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.

d. On a $f_n(1)=\dfrac{\ln 2}{n}$.

On a donc $-2<0<1$ ou encore $f_n(0)<f_n(\alpha_n)<f_n(1)$ d'où par croissance de la fonction f_n, $0<\alpha_n<1$.

3. On sait que $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0\Leftrightarrow 2\alpha_{n+1}-2+\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{\alpha_{n+1}}=0\Leftrightarrow 2\alpha_{n+1}-2=-\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{\alpha_{n+1}}(1)$.

D'autre part : $f_n(\alpha_{n+1})=2\alpha_{n+1}-2+\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1}=-\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{\alpha_{n+1}}+\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1}$

en utilisant (1) $f_n(\alpha_{n+1})=\ln(\alpha_{n+1}^2+1)\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right]=\ln(\alpha_{n+1}^2+1)\times\dfrac{1}{n(n+1)}$

Or $\alpha_{n+1}^2\geqslant 0\Rightarrow\alpha_{n+1}^2+1\geqslant 1\Rightarrow\ln(\alpha_{n+1}^2+1)\geqslant 0.$ D'autre par $\dfrac{1}{n(n+1)}>0.$

Conclusion $\ln(\alpha_{n+1}^2+1)\times\dfrac{1}{n(n+1)}>0$ ou encore $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4. **a.** On vient de démontrer que $0<f_n(\alpha_{n+1})$ ou encore $f_n(\alpha_n)<f_n(\alpha_{n+1})$.

D'où par croissance de la fonction f_n, $\alpha_n<\alpha_{n+1}$.

Conclusion : la suite (α_n) est donc croissante.

b. La suite est croissante et majorée par 1 : elle donc convergente vers une limite l.

c. $\alpha_n=1-\dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ entraîne par limite au voisinage de plus l'infini que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}=0$,

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1.$