

Exercice 1: (5 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des cinq questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. a et b étant deux réels distincts. Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et $f(a) < f(b)$, alors l'image de l'intervalle [a, b] par f est l'intervalle [f(a), f(b)].
2. On considère la fonction u définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et la fonction v définie et continue sur $]0, +\infty[$. Leurs tableaux de variations sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
u(x)	1		$+\infty$	2	1
		$\searrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				

x	0	1	$+\infty$
v(x)	$+\infty$		
		$\searrow$	
	$-\infty$		

- a) L'ensemble de définition de $v \circ u$ est : $] -\infty, 1[\cup] 2, +\infty[$.
 - b) L'image de l'intervalle $] -\infty, 1[$ par $v \circ u$ est : $] 0, +\infty[$.
3. Si la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes.
 4. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et vérifiant pour tout $x \neq 1$,
 $x^2 + x + 2 \leq f(x) \leq x^3 + 2x + 1$, alors f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 2: (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$. On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose dans cette question que : $u_0 \geq 0$.
 - a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
 - b) Etablir que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$.
 - c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_0 + \frac{n}{2}$. Quelle est alors la limite de (u_n) ?

2. On suppose dans cette question que $u_0 \leq -1$.

- Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq -1$.
- Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis justifier la convergence de (u_n) .
- Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3: (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de sens direct tel que $AB = 2AD$. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

- Caractériser l'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$.
- Soit $f = t_{\vec{AC}} \circ S_{(IJ)}$. Montrer que f est la symétrie glissante d'axe (BC) et de vecteur $\vec{AD}$.
- Soit g une isométrie qui fixe un point de (AB) et qui transforme (AB) en (IC).
 - Montrer que $g(I) = I$.
 - Déterminer alors toutes les isométries g .

Exercice 4: (6 points)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm. On appelle $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan (P) privé du point O dans (P) qui, à tout point M différent de O, d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par $z' = z + i - \frac{1}{z}$.

- On considère les points A et B d'affixes $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' d'affixes respectives a' et b' .
 - Calculer a' et b' . Placer les points A, B, A' et B' sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
 - Démontrer que $\frac{-b}{b' - b} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$. En déduire la nature du triangle OBB'.
- Déterminer l'ensemble (E) des points M de $P \setminus \{O\}$ qui ont pour image, par F, le point O.
 - Démontrer que les points de (E) appartiennent à $(\mathcal{C})$.
- Soit θ un réel.
 - Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (1 + 2\sin \theta)i$.
 - Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M' lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 1 :

1. **Faux** ; 2. a) **Vrai** ; 2.b) **Faux** ; 3. **Vrai** ; 4. **Vrai**.

Exercice 2 :

1. On suppose dans cette question que : $u_0 \geq 0$.

- a) On a $u_0 \geq 0$.

On suppose que $u_n \geq 0$ et on montre que $u_{n+1} \geq 0$.

Comme $u_n \geq 0$ alors $2u_n + 1 \geq 0$, il en résulte que $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} \geq 0$.

D'où, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.

- b) Pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{2} = \frac{2(2u_n^2 + 2u_n + 1) - (2u_n + 1)^2}{2(2u_n + 1)} = \frac{1}{2u_n + 1} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

- c) On a :

$u_1 \geq u_0 + \frac{1}{2}$ $u_2 \geq u_1 + \frac{1}{2}$. . . $u_n \geq u_{n-1} + \frac{1}{2}$	D'où par sommation membre à membre de ces n inégalités, on obtient : $u_n \geq u_0 + \frac{1}{2}n \quad \text{Ou encore } u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}.$ Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + \frac{n}{2} = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
---	--

2. On suppose dans cette question que $u_0 \leq -1$.

- a) On a : $u_0 \leq -1$.

On suppose que $u_n \leq -1$ et on montre que $u_{n+1} \leq -1$.

On a : $u_n \leq -1 \Leftrightarrow 2u_n \leq -2 \Leftrightarrow 2u_n + 1 \leq -1$ donc $2u_n + 1 < 0$.

$$u_{n+1} + 1 = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} + 1 = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1 + (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{2u_n^2 + 4u_n + 2}{2u_n + 1} = \frac{2(u_n + 1)^2}{2u_n + 1} \geq 0$$

D'où $u_{n+1} \leq -1$. Par suite pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq -1$.

- b) Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2u_n + 1}$.

Comme $2u_n + 1 < 0$ et $u_n + 1 \leq 0$ alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Il en résulte que la suite (u_n) est croissante.

Or la suite (u_n) est majorée par -1, il en résulte que la suite (u_n) est convergente.

c) Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Comme pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq -1$, alors $\ell \leq -1$.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -1]$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$, on pour tout entier n ,

$u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en ℓ donc

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell + 1}{2\ell + 1} = 0 \Leftrightarrow \ell = -1.$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Exercice 3 :

1. On a : $\vec{IB}$ est un vecteur normal à (IJ) et $t_{\vec{IB}}((IJ)) = (BC)$ donc $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)} = t_{\vec{IB}} = t_{\vec{AB}}$.

2. $f = t_{\vec{AC}} \circ S_{(IJ)} = t_{\vec{AD+AB}} \circ S_{(IJ)} = t_{\vec{AD}} \circ t_{\vec{AB}} \circ S_{(IJ)} = t_{\vec{AD}} \circ S_{(BC)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} = t_{\vec{AD}} \circ S_{(BC)}$

Comme $\vec{AD}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) , alors f est la symétrie glissante d'axe (BC) et de vecteur $\vec{AD}$.

3. a) Soit J un fixe point de g et appartenant à la droite (AB) ,
on a : $J \in (AB) \Rightarrow g(J) = J \in g((AB)) = (IC)$.
Ainsi : $\{J\} = (AB) \cap (IC) = \{I\}$, d'où $g(I) = I$.

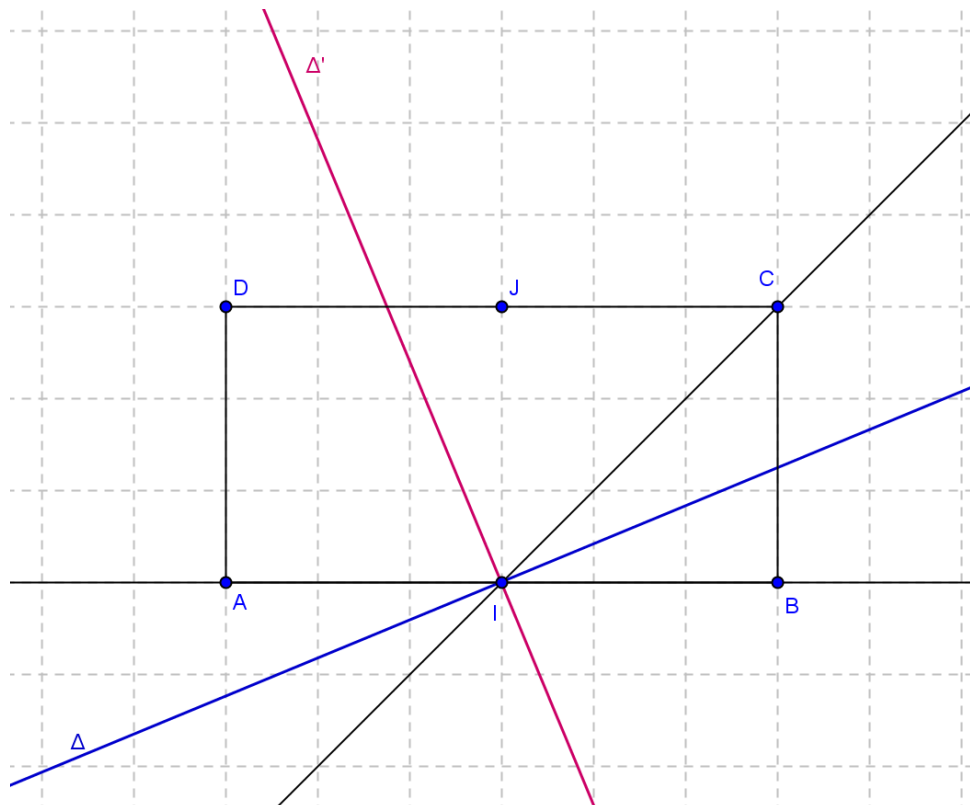
b) g est une isométrie transforme la droite (AB) en (IC) donc $g \neq Id_p$. D'autre part, g fixe le point I donc g est une symétrie orthogonale d'axe passant par I ou une rotation de centre I et d'angle non nul.

Si g est une symétrie orthogonale d'axe passant par I alors $g = S_{\Delta}$ ou $g = S_{\Delta'}$ où (Δ) et (Δ')

sont les bissectrices intérieures respectives des angles $\left(\vec{IB}, \vec{IC}\right)$ et $\left(\vec{IA}, \vec{IC}\right)$.

Si g est une rotation de centre I alors une mesure de son angle est $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$ d'où

$$g = R_{\left(I, \frac{\pi}{4}\right)} \text{ ou } g = S_{\left(I, -\frac{3\pi}{4}\right)}.$$



Exercice 4 :

1. a) $a' = a + i - \frac{1}{a} = 2i - \frac{1}{i} = 3i$

et $b' = b + i - \frac{1}{b} = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} + i = 2i \sin \frac{\pi}{6} + i = 2i$.

b)

$$\frac{-b}{b' - b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{i - e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + 3i} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 3i} = \frac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + 3i)}{3 + 9} = \frac{3 + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3}{12} = \frac{4i\sqrt{3}}{12} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a ainsi : $\frac{\text{Aff}\left(\vec{BO}\right)}{\text{Aff}\left(\vec{BB'}\right)}$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\vec{BO}$ et $\vec{BB'}$ sont orthogonaux

d'où le triangle OBB' est rectangle en B.

2. a) On cherche l'ensemble (E) des points M du plan (P), privé de O qui ont pour image par F, le point O ; c'est-à-dire l'ensemble des points M d'affixe z non nulle tel que $F(M) = M' = O$, ce qui donne $z' = 0$.

$$z' = 0 \Leftrightarrow z + i - \frac{1}{z} = 0 \text{ et } z = 0 \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \text{ et } z \neq 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$ est $\Delta = -1 + 4 = 3$.

Les racines de cette équation sont : $z_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $z_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Par suite : $E = \{C, D\}$ avec C d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et D d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

$$\text{b) } z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$|z_C| = |z_D| = 1$ donc $OC = OD$ donc C et D appartiennent à $(\mathcal{C})$.

3. a) si $z = e^{i\theta}$ où θ est réel alors $z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta + i = i(1 + 2 \sin \theta)$.

b) Lorsque M d'affixe z appartient au cercle $(\mathcal{C})$ alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$, l'affixe du point M' est donc $z' = i(1 + 2 \sin \theta)$, donc M' appartient à l'axe $(O, \vec{v})$.

De plus : $-1 \leq \sin \theta \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \theta \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2 \sin \theta \leq 3$.

Notons A' le point d'affixe 3 et A'' le point d'affixe -1, l'ensemble (Γ) est le segment $[A''F]$.

