

Lycée IBN KHALDOUN	Devoir de Contrôle N°1	Niveau : 3 ^{ème} Maths 1
Mr ABIDI Farid	26/10/2011	Durée : 2 heures

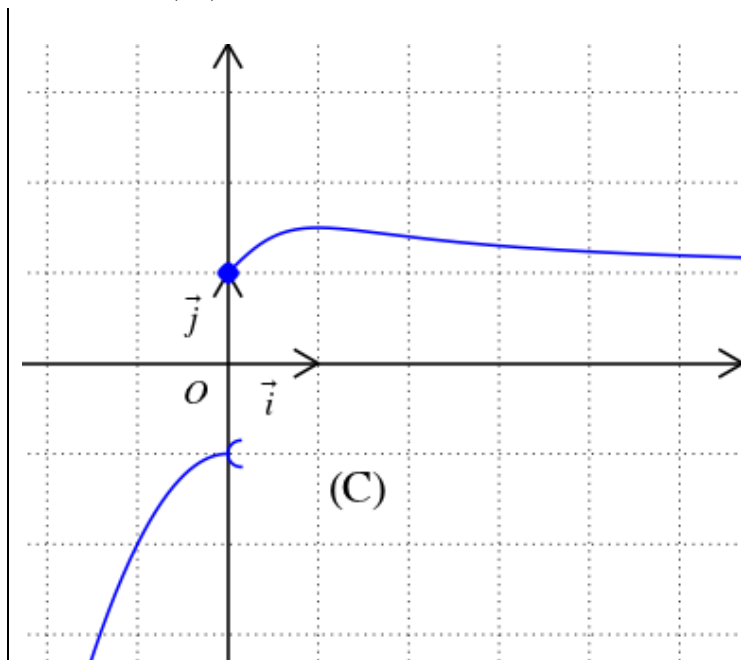
Exercice 1: (4 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes en justifiant la réponse.

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls du plan tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{19\pi}{3} [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv -\frac{32\pi}{3} [2\pi]$, alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.
- Soit ABC est un triangle isocèle et rectangle en A tel que $AB = a$, $a > 0$. On note I le milieu de [BC]. Si M est un point de la droite (AI) alors $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
Ci-contre est tracée la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$.



- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2(1-x^2)$.
L'image de l'intervalle $[0, 1]$ par f est $[0, 1]$.

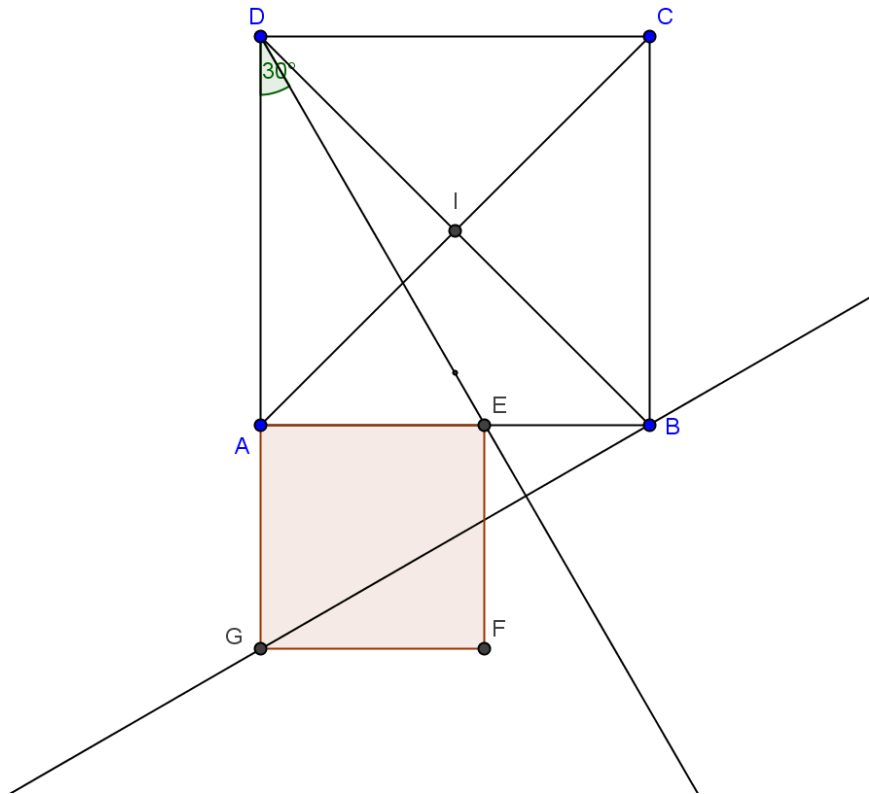
Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie $f(x) = (x-2)\sqrt{1-x}$.

- Montrer que f est continue sur son ensemble de définition D.
 - Montrer que f est strictement croissante sur D.
 - Vérifier que $f(D) =]-\infty, 0]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution α dans D.
 - Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} près.

Exercice 3 : (10 points)

Soit ABCD un carré de centre I. On donne $AB = \sqrt{3}$ et soit E le point du segment [AB] tel que $\angle ADE = 30^\circ$. On construit à l'extérieur du carré ABCD le carré AEFG.



1. Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$; en déduire DE et montrer que $AE = 1$.

2. a) Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Montrer que $(DE) \perp (BG)$.

c) Montrer que $DE = BG$.

3. a) Soit (Γ_1) des points M du plan tels que : $MA^2 + MC^2 = 6$.

Vérifier que B appartient à (Γ_1) ; déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) .

b) La droite (BG) recoupe (Γ_1) en H. Montrer que les points D, E et H sont alignés et calculer GH.

4. Soit J le milieu du segment [BG].

a) Montrer que $JH = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que $MG^2 - MB^2 = 2(\sqrt{3}-1)$.

Exercice 1 :**1. Faux.**

En effet : si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{19\pi}{3}[2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv -\frac{32\pi}{3}[2\pi]$, alors

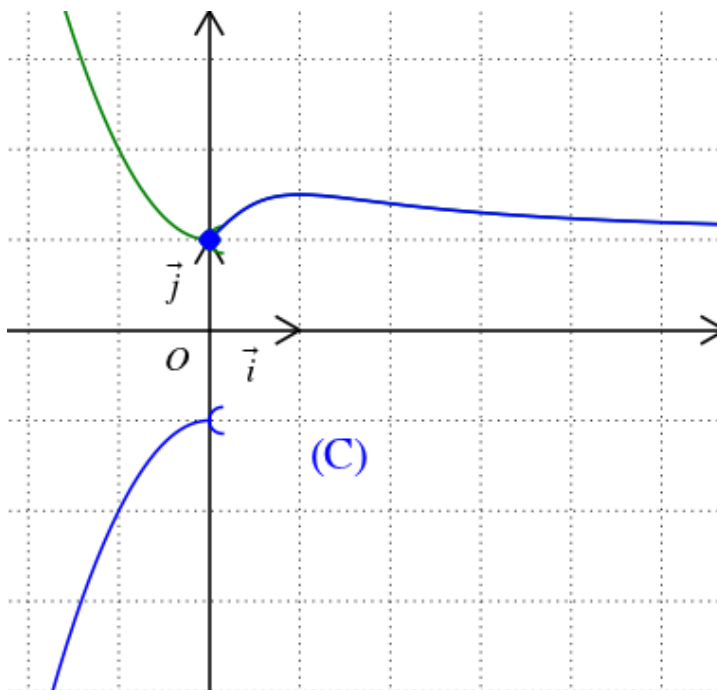
$$(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{w}) \equiv \frac{19\pi}{3} + \frac{32\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv \frac{51\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv 17\pi[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$$

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de sens contraires.

2. Vrai.

En effet : Si M est un point de la droite (AI) alors I est le projeté orthogonal de M sur

(BC). D'où $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \cdot BC = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$.

3. Vrai.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les courbes représentatives de f et $|f|$ sont confondues.

Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la courbe représentative de $|f|$ est le symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.

On peut tracer d'une manière continue la courbe représentative de $|f|$ donc $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Faux.

En effet :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad (\text{impossible})$$

donc $1 \notin f([0, 1])$.

Exercice 2 :

1. a) L'ensemble de définition de f est $D =]-\infty, 1]$.

La fonction $x \mapsto x - 2$ est continue sur D .

La fonction $x \mapsto 1 - x$ est continue et positive sur D donc $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ est continue sur D .
Donc f est le produit de deux fonctions continues sur D donc f est continue sur D .

- b) Soit a et b deux réels de D tels que $a < b$,

On a : $a - 2 < b - 2 < 0$ donc $-(a - 2) > -(b - 2)$

et $-a > -b$ donc $1 - a > 1 - b$ donc $\sqrt{1 - a} > \sqrt{1 - b}$

D'où $-(a - 2)\sqrt{1 - a} > -(b - 2)\sqrt{1 - b} \Leftrightarrow (a - 2)\sqrt{1 - a} < (b - 2)\sqrt{1 - b} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

Ainsi, f est strictement croissante sur D .

- c) f est continue et strictement croissante sur D donc $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, f(0)] =]-\infty, 0]$.

2. a) f est continue et strictement croissante sur D et $-4 \in f(D) =]-\infty, 0]$ donc l'équation

$f(x) = -4$ admet une unique solution α dans D .

- b) On a $f(-1) = -3\sqrt{2} \approx -4,24$ et $f(0) = -2$.

$f(-1) < -4 < f(0)$ donc $-1 < \alpha < 0$.

$f(-0,5) \approx -3,06$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,5$

$f(-0,75) \approx -3,63$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,75$

$f(-0,8) \approx -3,75$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,8$

$f(-0,9) \approx -3,99$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,99$

Exercice 3:

1. A est le projeté orthogonal de E sur (AD) donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = DA^2 = 3$.

Or $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = DA \cdot DE \cdot \cos(\widehat{ADE}) = \sqrt{3} \cdot DE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} DE$, il en résulte : $\frac{3}{2} DE = 3$ d'où $DE = 2$.

Le triangle ADE est rectangle en A donc $AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$.

2. a) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG} = DA \cdot AG = DA \cdot (DA + AG) = DA \cdot (DA + AE) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA} = -AE \cdot AB = -\sqrt{3}$.

- b) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$

$$= -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$$

$$= -DA^2 + (3 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 0$$

$$= -3 + 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 0$$

Donc $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{BG}$ d'où $(DE) \perp (BG)$.

c) Les deux triangles ADE et ABG sont rectangles en A, $AE = AG$ et $AD = AB$ donc :

$$DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{BA^2 + AG^2} = BG.$$

3. a) $BA^2 + BC^2 = AC^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = \sqrt{6}^2 = 6$ donc B appartient à (Γ_1) .

Pour tout point M du plan, $MA^2 + MC^2 = 6 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 6$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 = 6 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 6 \Leftrightarrow MI^2 = 3 - IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = 3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow IM = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, (Γ_1) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou encore le cercle de centre I et passant par B. D'où (Γ_1) est le cercle circonscrit au carré ABCD.

b) [BD] est un diamètre du cercle (Γ_1) et comme H appartient à (Γ_1) alors

$(DH) \perp (BH)$ ou encore $(DH) \perp (BG)$. Or $(DE) \perp (BG)$, il en résulte : $(DH) \parallel (DE)$ d'où les points D, E et H sont alignés.

$$\text{On a : } \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD} = GA \cdot GD \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GH} = GB \cdot GH$$

$$\text{D'où } GA \cdot GD = GB \cdot GH. \text{ Ainsi : } GH = \frac{GA \cdot GD}{GB} = \frac{1 \cdot (1 + \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \quad \text{a) } JH = JB - HB = \frac{1}{2}GB - (GB - GH) = GH - \frac{1}{2}GB = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\text{b) Pour tout point M, } MG^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BG} \cdot (2\overrightarrow{MJ}) = 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

Soit K le projeté orthogonal de M sur (BG), $MG^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{KJ}$.

$$\text{D'où } M \in (\Gamma_2) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{KJ} = 2(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{KJ} = \sqrt{3} - 1$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{KJ} > 0$ donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires et de même sens et par suite $BG \cdot KJ = \sqrt{3} - 1$.

$$\text{D'où } 2KJ = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow KJ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Or $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont colinéaires et de même sens et $HJ = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, donc $K = H$.

Par suite, (Γ_2) est la droite perpendiculaire à la droite (BG) en H d'où $\Gamma_2 = (DH)$.

