Lycée IBN KHALDOUN	Devoir de synthèse n ° 2	Classe : 4 M_1
RADES	Mathématiques	Durée : 4 heures
Mr ABIDI Farid	Mars 2012	Coefficient : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées 1/3 – 2/3 – 3/3

Exercice 1: (3 points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. La justification est demandée.

1. Si f est la fonction définie par $f(x)=\ln x$ alors l'ensemble de définition de la fonction $f\circ f$ est :

a) $]1,+\infty[$; b) $]0,+\infty[$; c) $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ est :

a) croissante sur $\mathbb{R}$; b) décroissante sur $\mathbb{R}$; c) non monotone sur $\mathbb{R}$.

3. Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison 9 alors
$\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+\dots+\ln(u_{10})=$

a) $\frac{\ln 3}{110}$; b) $110\ln 3$; c) $\frac{110}{\ln 3}$

Exercice 2: (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'hyperbole (H) de foyer F(2, 0) , de directrice la droite (D) d'équation $x=\frac{1}{2}$ et d'excentricité 2.

1. a) Ecrire une équation de (H) et déterminer son centre.
   b) Déterminer les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

2. Soit (E) l'ellipse de foyer F, de centre O et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

   a) Déterminer les sommets de (E) et tracer (E) dans le même repère que (H).

   b) Ecrire une équation de (E).

3. a) Vérifier que I(2, 3) est un point d'intersection de (H) et (E).

   b) Prouver que les tangentes en I à (E) et à (H) sont perpendiculaires.

4. Soit (P) la partie du plan limitée par (E), (H) et les droites d'équations x = 1 et x =2.

Calculer le volume du solide de révolution engendré par rotation de (P) autour de l'axe des abscisses

Exercice 3: (4 points)

1. a) Vérifier que $5^2 \equiv 9(\text{mod}16)$ et $5^4 \equiv 1(\text{mod}16)$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel k , $5^{4k+2} \equiv 9(\text{mod}16)$.

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$.

   Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \equiv 9(\text{mod}16)$.

3. Soit (v_n) une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 1$.

   Démontrer que pour tout entier naturel p , $v_{4p+2} \equiv 9(\text{mod}16)$.

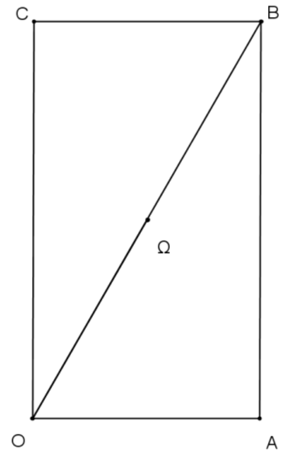
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont une infinité de termes égaux.

5. $u_1 = v_0 = 25$ est la première égalité de deux termes égaux. Déterminer les deux suivantes égalités.

Exercice 4 : (4 points)

On donne dans le plan orienté , le rectangle OABE tel que OA = 2 et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par (C) le cercle de diamètre [OB] et de centre Ω.
Soit S la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



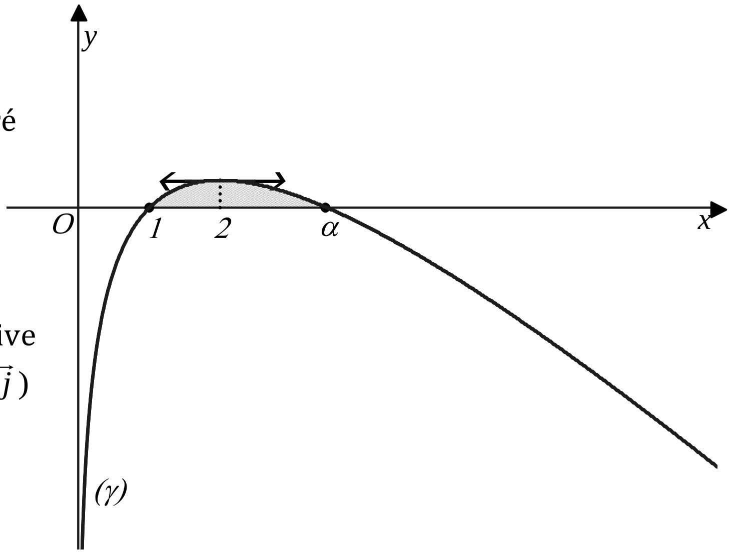
1. Soit A' le point de la demi droite [OB) tel que OA' = $2\sqrt{3}$.
   Prouver que S(A) = A'.
2. a) Vérifier que le triangle $OA\Omega$ est équilatéral.
   b) Déterminer $S(\Omega)$.
   c) Construire alors le cercle (C') image de (C) par S.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ tel que $z_A = 2$ et $z_C = 2i\sqrt{3}$.

Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = iz + 4 + 2i\sqrt{3}$

a) Donner l'écriture complexe de S.
b) Trouver l'affixe de Ω et celle de $\Omega' = S(\Omega)$.
c) Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre H et un angle.
d) Vérifier que $f(\Omega') = \Omega$ et déterminer $f \circ S(\Omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de $f \circ S$

Exercice 5: (5 points)

La figure ci-dessous, montre la courbe représentative (γ), dans un repère orthonormé, de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2\ln x$.



1- a) Montrer que $3,51 < \alpha < 3,52$.

b) Déterminer le maximum de $h(x)$.

2- Calculer l'aire $S(\alpha)$ du domaine hachuré limité par (γ) et l'axe des abscisses.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$

3- a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à (C).

4- a) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

b) Tracer (C).

5- a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x) > \alpha$.

6. Soit (I_n) la suite définie, pour $n \geq 4$, par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Corrigé

Exercice1:

1. a)

En effet :

Soit f est la fonction définie par $f(x)=\ln x$, $f\circ f(x)=f(f(x))$ est défini

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x>0 \Leftrightarrow x>0$ et $x>1$ d'où $x>1$.

Ainsi , l'ensemble de définition de $f\circ f$ est $]1,+\infty[$.

2. c)

En effet : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{dt}{(t^2+1)^2}$.

$x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $t\mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et pour tout x réel , $F'(x)=2x.\dfrac{1}{(x^4+1)^2}$.

3. b)

En effet : Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison 9 alors

$u_n=u_0 9^n=9^n$

et $\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_{10})=\ln 1+\ln 9+\ln(9^2)+...+\ln(9^{10})=\ln(9\times 9^2\times ...\times 9^{10})$

$=\ln(9^{1+2+3+...+10})=\ln\left(9^{\frac{10(1+10)}{2}}\right)=\ln\left(9^{\frac{110}{2}}\right)=110\ln 3$

Exercice 2:

1. a) $M(x,y)\in(H) \Leftrightarrow MF^2=4d^2(M,d)\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=4x^2-4x+1$

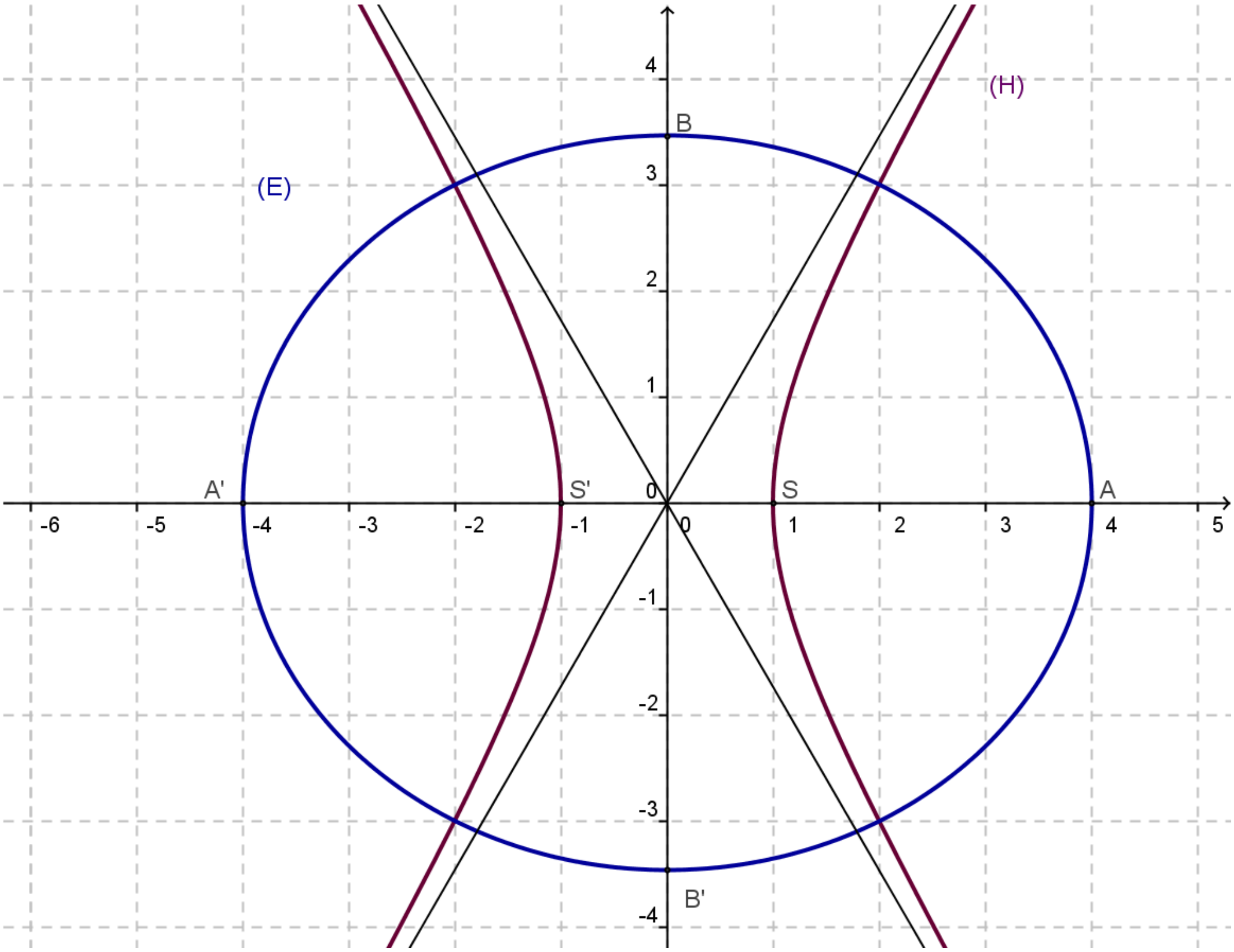
$\Leftrightarrow 3x^2-y^2=3\Leftrightarrow x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. Donc (H) : $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. Ainsi, (H) est une hyperbole de centre O.

b) Les sommets de (H) sont S(1, 0) et S'(-1, 0).

Les asymptotes de (H) sont les droites d'équations respectives $y=x\sqrt{3}$ et $y=-x\sqrt{3}$.

2. Soit (E) l'ellipse de foyer F, de centre O et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

a) On a : c = OF = 2 et $\frac{1}{2}=e=\frac{c}{a}$ donc a = 4 et $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Les sommets de (E) sont les points de (H) sont A(4, 0) , A'(-4 , 0) , $B\left(0,2\sqrt{3}\right)$ et $B'\left(0,-2\sqrt{3}\right)$.



b) Une équation de (E) est $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

3. a) Soit I(2, 3) , $2^2-\frac{3^2}{3}=4-3=1$ et $\frac{2^2}{16}+\frac{3^2}{12}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ donc I est un point d'intersection de (H) et (E).

b) La tangente à (H) en I est d'équation $2x-\frac{3y}{3}=1 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur .

La tangente à (E) en I est d'équation $\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1 \Leftrightarrow x+2y-1=0$; $\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur .

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux donc les tangentes en I à (E) et à (H) sont perpendiculaires.

4. $M(x,y)\in(H)\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1\Leftrightarrow y^2=3x^2-3$ et $M(x,y)\in(E)\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\Leftrightarrow y^2=12-\frac{3}{4}x^2$.

Donc $V=\pi\int_1^2\left(12-\frac{3}{4}x^2-3x^2+3\right)dx=\pi\int_1^2\left(15-\frac{15}{4}x^2\right)dx=\pi\left[15x-\frac{5}{4}.x^3\right]_1^2=\frac{25}{4}\pi$.

Exercice 3:

1. a) On a : 25 – 9 = 16 donc $25\equiv 9(\text{mod}16)$ d'où $5^2\equiv 9(\text{mod}16)$. Il en résulte : $5^4\equiv 81(\text{mod}16)$.

   Or 81 = 5. 16 + 1 , donc $81\equiv 1(\text{mod}16)$ par suite $5^4\equiv 1(\text{mod}16)$.

   b) Pour tout entier naturel k , $5^{4k}\equiv 1(\text{mod}16)\Rightarrow 5^{4k}.25\equiv 9(\text{mod}16)\Rightarrow 5^{4k+2}\equiv 9(\text{mod}16)$.

2. (u_n) une suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0=9$ donc pour tout entier naturel n , on :

   $u_n=u_0+16n=9+16n$ d'où pour tout entier naturel n , $u_n\equiv 9(\text{mod}16)$.

3. (v_n) une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0=1$ donc pour tout entier naturel n, on :
$v_n=v_0.5^n=5^n$ d'où $v_{4p+2}=5^{4p+2}$ pour tout entier naturel p.

   Ainsi, pour tout entier naturel impair p , $v_{4p+2}\equiv 9(\text{mod}16)$.

4. On a : $u_n\equiv 9(\text{mod}16)$ et $v_{4p+2}\equiv 9(\text{mod}16)$ donc $u_n\equiv v_{4p+2}(\text{mod}16)$ d'où les suites (u_n) et (v_n) ont une infinité de termes égaux.

5. $u_1=v_0=25$ est la première égalité de deux termes égaux.

   $v_6=5^6=15625$ et 15625 = 976.16 + 9 donc $u_{976}=15625$ d'où $u_{976}=v_6$.

Exercice 4 :

S la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. A' le point de la demi droite [OB) donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et OA' = $2\sqrt{3}=OA.\sqrt{3}$

   Donc S(A) = A'.

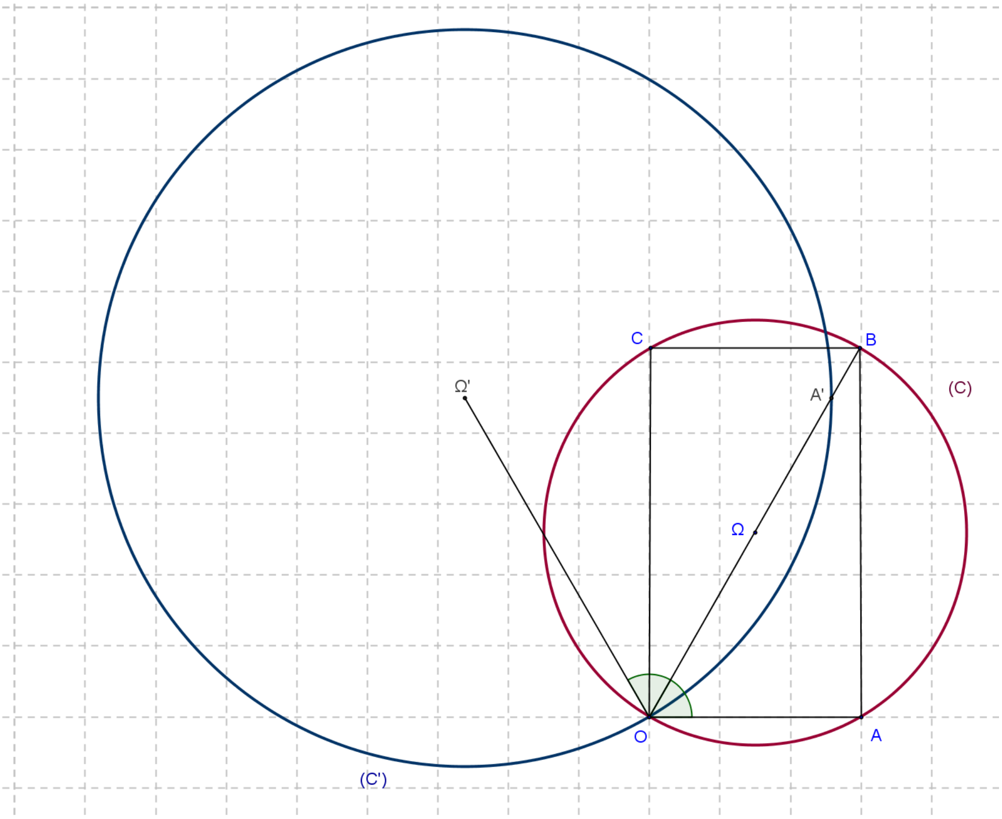
2. a) Ω est le centre du rectangle OABC donc $\Omega O=\Omega A$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc le triangle $OA\Omega$ est équilatéral.

   b) Soit $\Omega'=S(\Omega)$, $\left(\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{O\Omega'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $O\Omega'=O\Omega.\sqrt{3}$. Comme $O\Omega=OA$

   alors $O\Omega'=OA.\sqrt{3}=OA'$.

c) (C’) image de (C) par S est le cercle de centre $\Omega'=S(\Omega)$ et de rayon $O\Omega'=OA'$.

Remarquons que $\tan\frac{\pi}{3}=\frac{AB}{OA}\Leftrightarrow AB=OA.\tan\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow AB=2\sqrt{3}$ donc $O\Omega'=OA'=AB=OC$.



3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $z_A=2$ et $z_C=2i\sqrt{3}$.

Soit f l’application du plan dans lui-même d’écriture complexe $z'=iz+4+2i\sqrt{3}$

a) S la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{3}$ et d’angle $\frac{\pi}{3}$ donc l’écriture complexe de S est : $z'=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z$

b) L’affixe de Ω est $z_\Omega=\frac{z_B}{2}=1+i\sqrt{3}$ donc l’affixe de $\Omega'=S(\Omega)$ est $z_{\Omega'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z_\Omega=-\sqrt{3}+3i$.

c) L’écriture complexe de f est $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+4+2i\sqrt{3}$ donc f est la rotation d’angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre H d’affixe $z_H=\frac{4+2i\sqrt{3}}{1-i}=\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)=2-\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

d) $iz_{\Omega'}+4+2i\sqrt{3}=i\left(-\sqrt{3}+3i\right)+4+2i\sqrt{3}=-i\sqrt{3}-3+4+2i\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}=z_\Omega$ donc $f\left(\Omega'\right)=\Omega$.

$f\circ S\left(\Omega\right)=f\left(S\left(\Omega\right)\right)=f\left(\Omega'\right)=\Omega$.

$f\circ S$ est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{3}$ et 1 , et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ donc $f\circ S$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

Comme $f\circ S(\Omega)=\Omega$ alors Ω est le centre de $f\circ S$.

Exercice 5:

1. a) $h(3.51)\times h(3.52)\approx(0.001)(-0.003)<0$ donc $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

   b) Le maximum de $h(x)$ est $h(2)=-1+\ell n4$.

2. $S(\alpha)=\int_1^{\alpha} h(x)dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\alpha}+2\left(\alpha.\ell n\alpha-\alpha+1\right)=\frac{3}{2}+2\left(\alpha.\ell n\alpha-\alpha\right)-\frac{1}{2}\alpha^2$.

3. a) (C) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$.

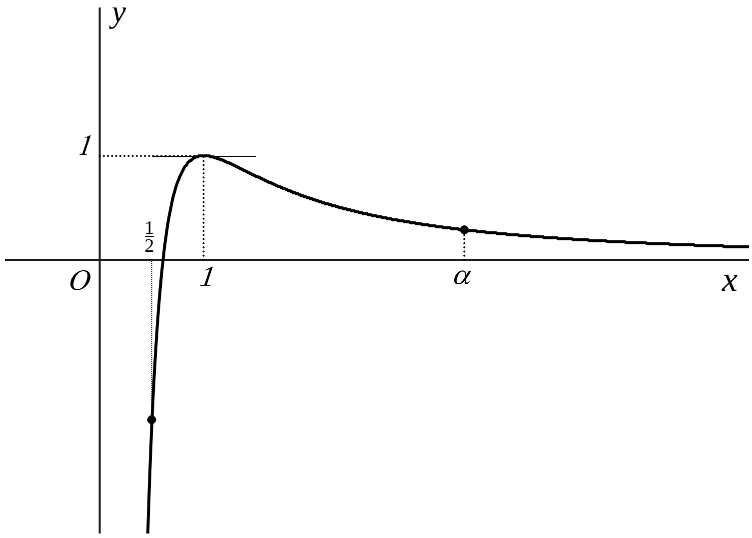
   b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}=0$ donc $(O,\vec{i})$ et $(O,\vec{j})$ sont asymptotes à (C) .

4. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x>0, $f'(x)=-\frac{4\ell n x}{x^3}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

$f(\alpha)=\frac{1+2\ell n\alpha}{\alpha^2}=\frac{h(\alpha)+\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$.

b)



5. a) La restriction de f à l'intervalle $[1\,;+\infty[$ est continue et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) f^{-1} est définie sur $f([1\,;+\infty[)=]0\,;1]$.

f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution $x=1$.

Donc f^{-1} est dérivable sur $f(]1\,;+\infty[)=]0\,;1[$.

c) $f^{-1}(x)>\alpha \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))<f(\alpha) \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x\in]0\,;\dfrac{1}{\alpha}[$.

6. a) Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $f(x)>0$.

De plus , $f(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1+2\ell n\,x-x}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}$; or $x\in[4;+\infty[$, $x>\alpha$ et $h(x)\prec 0$.

Donc , pour tout $x\in[4;+\infty[$, $0\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

b) Pour tout $n\ge 4$, et pour tout x de [n, n+1] , on a : $0\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$ donc $0\le\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx\le\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$ d'où $0\le I_n\le\ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ell n\left(\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ell n\ (1)=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.