

Lycée IBN KHALDOUN	Devoir de synthèse n ° 2	Classe : 2 S ₁
RADES	Mathématiques	Durée : 2 heures
Mr ABIDI Farid	Mars 2012	Coefficient : 2

Le sujet comporte trois page numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » à chacune des propositions suivantes. Justifier chaque réponse.

1. Si ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=2$ et $BAC=\frac{2\pi}{3}$ alors $BC=\sqrt{7}$.
2. Si $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ tel que $\tan^2 \alpha = \frac{144}{25}$ alors $12\cot \alpha + 5\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{10}{13}$.
3. Si $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $\cos x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 2: (4 points)

Soit un triangle ABC tel que $CAB=\frac{\pi}{4}$, $ACB=\frac{\pi}{6}$, $AB=\sqrt{2}$ et $BC=2$.

1. Calculer $\angle ABC$.
2. Soit H le projeté orthogonal B sur (AC).
 - a) Calculer les distances AH et CH.
 - b) Vérifier que $AC=1+\sqrt{3}$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3: (5 points)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et de sens direct ; I est un point extérieur à ABCD tel que IAD est un triangle rectangle et isocèle en I. On note r la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Construire le point E image de B par r.
 b) Montrer que $D=r(A)$.
 a) Montrer que le triangle CDE est rectangle et isocèle.
2. Soit F le symétrique de A par rapport à I.
 a) Montrer que $r(D)=F$.
 b) En déduire que $BD=EF$.

3. Soit O' le milieu de $[EF]$.

a) Montrer que $r(O) = O'$.

b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BD]$. Déterminer et construire $\mathcal{C}' = r(\mathcal{C})$.

c) $(\mathcal{C})$ coupe (BI) en H et $(\mathcal{C}')$ recoupe (EI) en K . Montrer que $r(H) = K$.

Exercice 4: (4 points)

1. Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_3 = 3$ et $U_{11} = 19$.

a) Déterminer la raison r et le premier terme U_0 de la suite (U_n) .

b) Déterminer l'entier n tel que $U_n = 25$

c) Soit a un réel strictement positif, montrer que $a^3 \times a^5 \times a^7 \times \dots \times a^{25} = a^{168}$.

2. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = (-2)^n$.

a) Calculer V_3 .

b) Calculer $S = V_3 + V_4 + V_5 + \dots + V_{14}$.

3. On pose pour tout entier naturel n , $W_n = U_n + V_n$.

a) Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

b) Vérifier que la suite (W_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

c) Calculer $S' = W_3 + W_4 + W_5 + \dots + W_{14}$.

Exercice 5: (4 points)

Une fonction f est donnée par sa courbe représentative (C) dans la figure ci-dessous.

1. Donner l'ensemble de définition D de f .

2. Quel est le maximum local de f ? En quel réel x_1 est-il atteint?

3. a) Donner les images de -2 et 2 par f .

b) Donner les antécédents de 0 et 3 par f .

4. Donner graphiquement le signe de $f(x)$ sur D .

5. Donner les variations de f .

6. Soit g la fonction définie sur $[-5, 5]$ par $g(x) = f(|x|)$.

a) Etudier la parité de g .

b) Tracer (C') la courbe représentative de g sur la feuille ci-jointe à la page 3/3.

Feuille à compléter et à rendre avec la copie

Nom et prénom de l'élève :

Figure de l'exercice 3 :

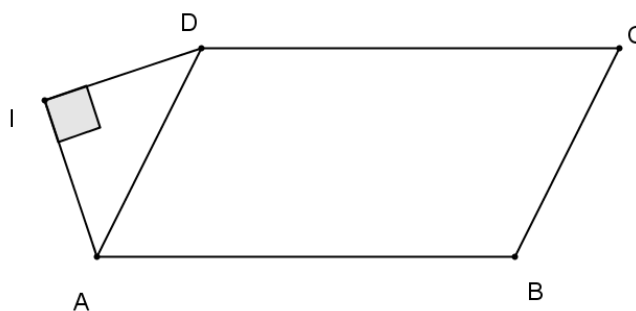
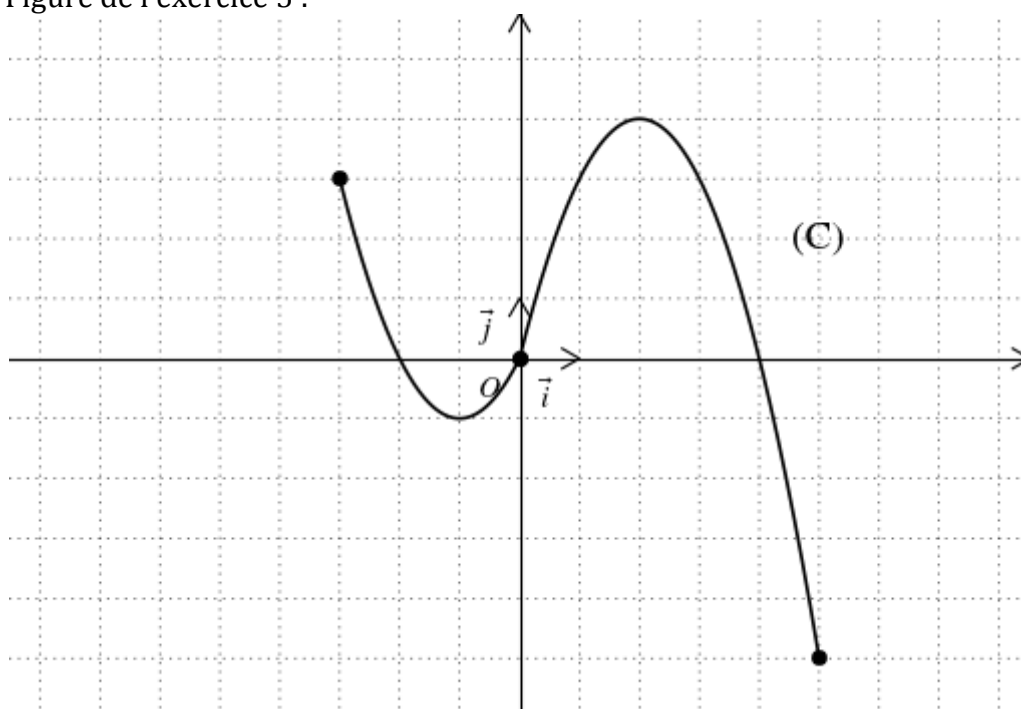


Figure de l'exercice 5 :



CORRIGE**Exercice 1 :**

1. Faux.

En effet :

Si ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=2$ et $BAC=\frac{2\pi}{3}$ alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos BAC = 13 - 12\left(-\frac{1}{2}\right) = 19 \quad \text{donc } BC = \sqrt{19} \neq \sqrt{7}.$$

2. Faux

En effet :

Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ alors $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$ et $\cos \alpha < 0$.

$$\tan^2 \alpha = \frac{144}{25} \quad \text{donc } \tan \alpha = -\frac{12}{5} \quad \text{d'où } \cot \alpha = -\frac{5}{12}.$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{donc } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{25}{169} \quad \text{d'où } \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha . \tan \alpha = \frac{12}{13}. \quad \text{Il en résulte :}$$

$$12 \cot \alpha + 5 \sin \alpha - \cos \alpha = -5 + \frac{60}{13} + \frac{5}{13} = -5 + 5 = 0.$$

3. Faux

En effet :

Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors

$$\cos x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 2: (4 points)

$$1. \quad ABC = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

2. Soit H le projeté orthogonal B sur (AC).

a) Le triangle ABH est rectangle en H et $ABH = ABC = \frac{\pi}{4}$

$$\text{donc } AH = AB . \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Le triangle CBH est rectangle en H et $\angle BCH = \angle BCA = \frac{\pi}{6}$

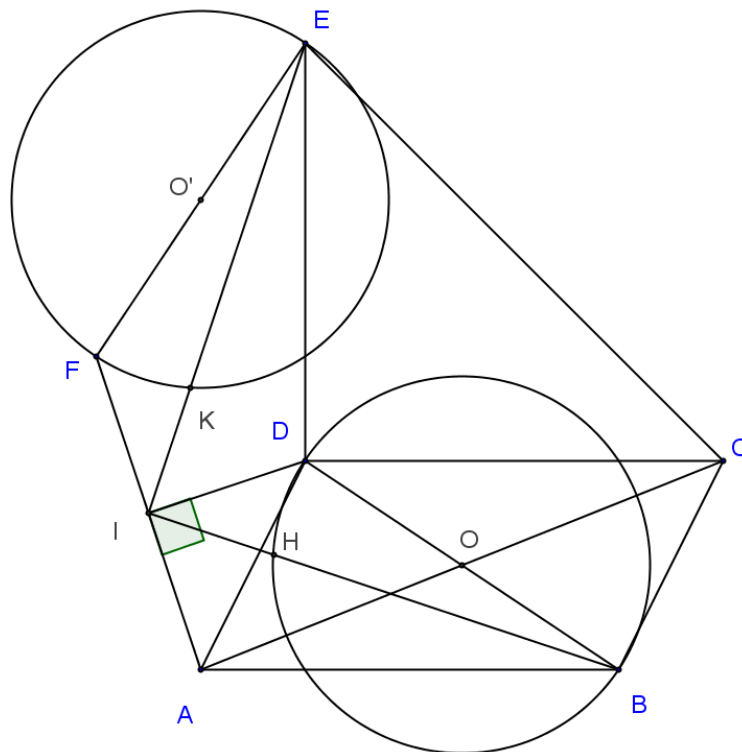
$$\text{donc } CH = BC \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

b) H appartient au segment [AC] donc $AC = AH + CH = 1 + \sqrt{3}$.

$$3. \text{ L'aire du triangle ABC est } \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ou encore, le triangle ACH est isocèle et rectangle en H donc $CH = AH = 1$, d'où l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{3}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3:



1. a) $r(B) = E$ équivaut à $IB = IE$ et $\angle BIE = \frac{\pi}{2}$ (dans le sens direct).

b) IAD est un triangle isocèle et rectangle en I et de sens direct donc $r(A) = D$.

c) On a : $r(A) = D$ et $r(B) = E$ donc $AB = DE$. Or $AB = DC$ alors $DC = DE$.

Comme $r((AB)) = (DE)$ alors les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires.

Or (AB) et (DC) sont parallèles, alors (DC) et (DE) sont perpendiculaires.

Donc le triangle CDE est rectangle et isocèle en D.

2. a) F le symétrique de A par rapport à I donc $IF = IA = ID$.

Or $\angle AID = \frac{\pi}{2}$ donc $\angle DIF = \frac{\pi}{2}$ (dans le sens direct).

D'où $r(D) = F$.

b) $r(B) = E$ et $r(D) = F$ donc $BD = EF$.

3. a) O' le milieu de $[EF]$.

O est le milieu de $[DB]$ donc $r(O)$ est le milieu de $r([DB]) = [FE]$ donc $r(O) = O'$.

b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BD]$.

$\mathcal{C}' = r(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $r([BD]) = [EF]$.

c) $(\mathcal{C})$ coupe (BI) en H et $(\mathcal{C}')$ recoupe (EI) en K.

H appartient à (BI) donc $r(H)$ appartient à $r((BI)) = (EI)$

H appartient à $(\mathcal{C})$ donc $r(H)$ appartient à $(\mathcal{C}')$.

Donc $r(H) = I$ ou $r(H) = K$. Comme H est différent de I alors $r(H) = K$.

Exercice 4:

1. Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_3 = 3$ et $U_{11} = 19$.

a) La raison de la suite (U_n) est $r = \frac{U_{11} - U_3}{11 - 3} = \frac{16}{8} = 2$ et le premier terme

$$U_0 = U_3 - 3r = 3 - 6 = -3.$$

b) $U_n = 25$ équivaut à $U_0 + nr = 25$ équivaut à $-3 + 2n = 25$ équivaut à $n = 14$.

c) Soit a un réel strictement positif,

$$a^3 \times a^5 \times a^7 \times \dots \times a^{25} = a^{3+5+7+\dots+25} = a^{U_3+U_4+U_5+\dots+U_{14}} = a^{\frac{12(U_3+U_{14})}{2}} = a^{168}.$$

2. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = (-2)^n$.

a) $V_3 = (-2)^3 = -8.$

- b) Pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = (-2)^{n+1} = -2(-2)^n = -2V_n$ donc est une suite géométrique de raison (-2) et de premier terme $V_0 = (-2)^0 = 1$. Il en résulte :

$$S = V_3 + V_4 + V_5 + \dots + V_{14} = V_3 \cdot \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = -8 \frac{1 - (-2)^{12}}{1 - (-2)} = \frac{8}{3} [2^{12} - 1] = 10920.$$

3. On pose pour tout entier naturel n , $W_n = U_n + V_n$.

a) $W_0 = U_0 + V_0 = -2$, $W_1 = U_1 + V_1 = -3$ et $W_2 = U_2 + V_2 = 5$.

b) On a $W_0 + W_2 = 3$ et $2W_1 = -6$ donc $W_0 + W_2 \neq 2W_1$
et $W_0 \cdot W_2 = -10$ et $W_1^2 = 9$ donc $W_0 \cdot W_2 \neq W_1^2$.

Donc la suite (W_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

c) $S' = W_3 + W_4 + W_5 + \dots + W_{14} = (U_3 + U_4 + \dots + U_{14}) + (V_3 + V_4 + \dots + V_{14})$
 $= 10920 + 168 = 11088$

Exercice 5:

1. L'ensemble de définition D de f est $[-3, 5]$.
2. Le maximum local de f est 4. Il est atteint en $x_1 = 2$.
3. a) $f(-2) = 0$ et $f(2) = 4$.

b) Les antécédents de 0 sont -2, 0 et 4.

Les antécédents de 3 sont -3, 1 et 3.

4. Le signe de $f(x)$ sur D est donné par le tableau suivant :

x	-3	-2	0	4	5
f(x)	+	0	-	0	+

5. f est décroissante sur chacun des intervalles $[-3, -1]$ et $[2, 5]$ et f est croissante que l'intervalle $[-1, 2]$.

6. Soit g la fonction définie sur $[-5, 5]$ par $g(x) = f(|x|)$.

a) Pour tout x de $[-5, 5]$, $-x$ appartient à $[-5, 5]$ et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$. Donc g est paire.

b) Pour tout x de $[0, 5]$, $g(x) = f(x)$. Donc sur l'intervalle $[0, 5]$, la courbe de g est confondue avec celle de f . (C') la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées voir figure ci jointe à la page 3/3.

Feuille à compléter et à rendre avec la copie

Nom et prénom de l'élève :

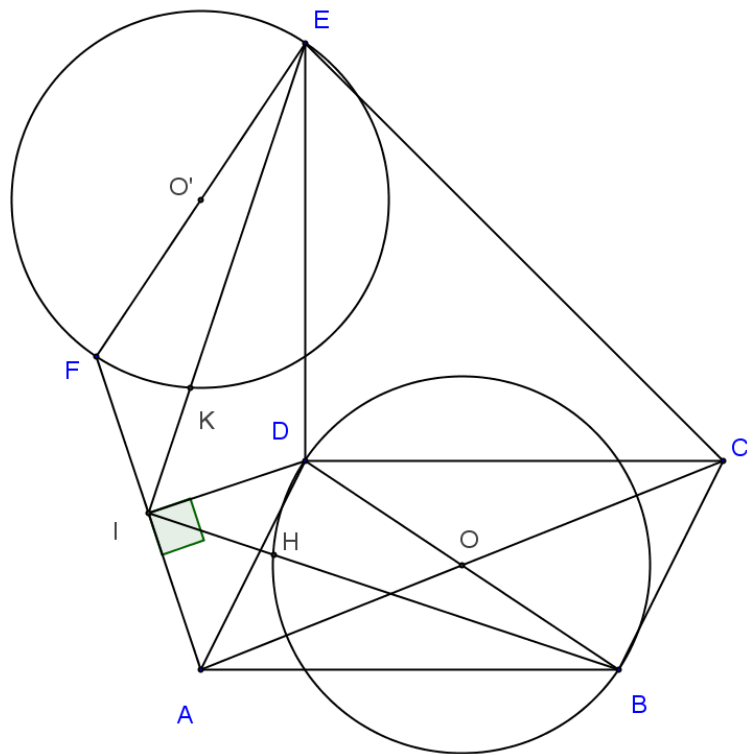


Figure de l'exercice 5 :

