

Le sujet comporte trois page numérotées 1/3 – 2/3 – 3/3

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « **Vrai** » ou « **Faux** » à chacune des propositions suivantes. La justification est exigée.

1. La forme trigonométrique du nombre complexe $1 + i \tan \frac{3\pi}{5}$ est $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{5}} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$.
2. Si les entiers naturels non nul x et y sont tels que $x < y$ et $x \wedge y = 17$ alors $x^3 \cdot y^2 = 289$.
3. La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$ passe par le point $A\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$.

Exercice 2 (4 points)

Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et z_C . Placer les points A, B et C .
2. Déterminer la nature du quadrilatère $OABC$.
3. Soit (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z + \bar{z} - 2 = 0$.
 - a) Vérifier que A et C sont deux points de (Δ) .
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) .
4. A tout point M d'affixe z tel que $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{4}{2-z}$.
 - a) Déterminer le point A' associé à A et le point C' associé à C .
 - b) Prouver que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$.
 - c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Δ) .

Exercice 3 (4 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3, n \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a) Calculer $x_8 \wedge x_9$ puis $x_{202} \wedge x_{203}$.
Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part et pour x_{202} et x_{203} d'autre part ?
b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux, pour tout entiers naturel n ?
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
b) Exprimer y_n en fonction de n .

Exercice 4 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + 2u_n}$ pour tout $n \geq 0$

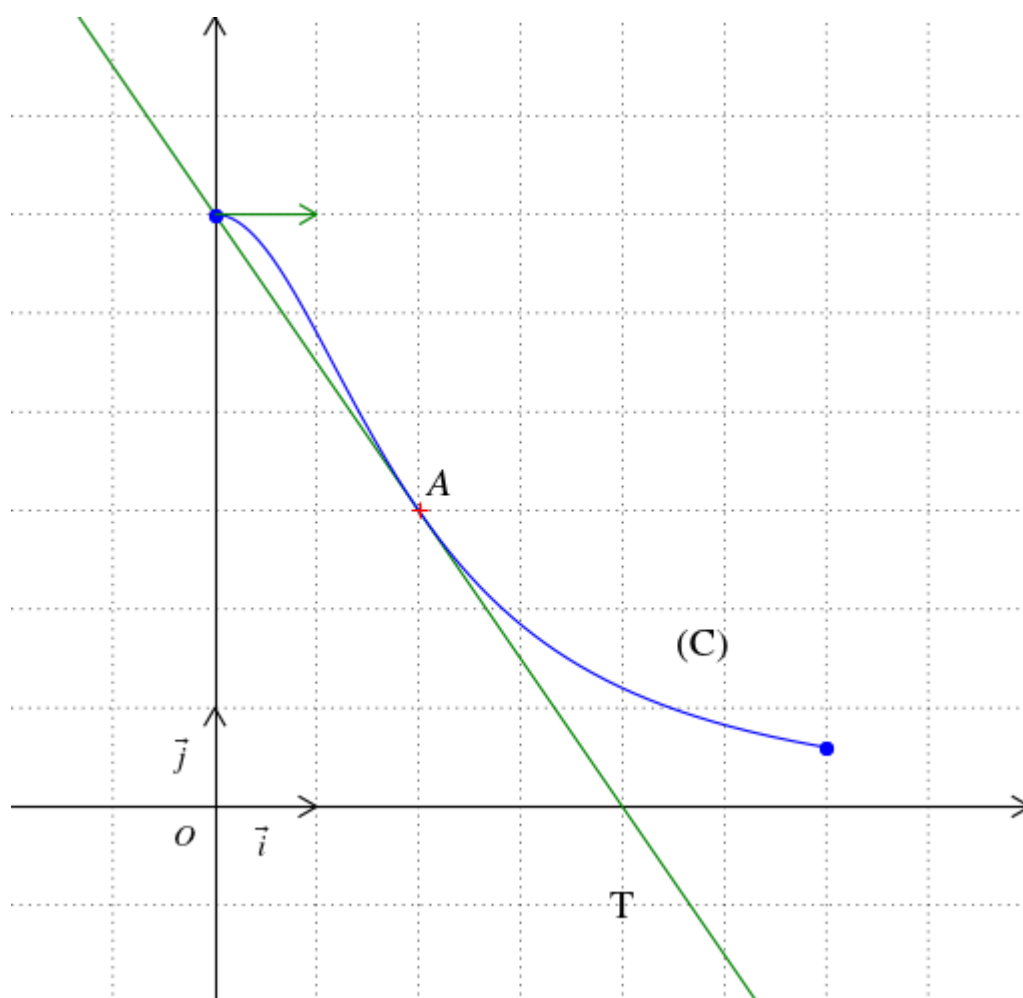
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Soit n un entier naturel. Montrer que : si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.
En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Montrer que la suite est bornée.
4. On pose $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n .
Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
5. Justifier que $v_n \neq 2$ pour tout entier naturel n et montrer que $u_n = \frac{1}{v_n - 2}$.
6. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
7. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

La courbe représentative (C) à la page 3-3 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0, 6]$. (T) est la tangente à (C) au point A d'abscisse 2.

1. Lecture graphique.
 - a) Donner $f(2)$, $f(0)$ et $f'(2)$.
 - b) Montrer que pour tout x de $[0, 6]$, $f(x) \geq -\frac{3}{2}x + 6$.
2. On suppose que pour tout x de $[0, 6]$, $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$.
 - a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0, 6]$.
 - b) Prouver que $a = 24$ et $b = 4$.
 - c) Dresser la tableau de variations de f .
3. Soit M un point de (C) d'abscisse x . H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On appelle $g(x)$ l'aire du triangle OMH.
 - a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x puis étudier les variations de g .
 - b) Tracer la courbe représentative de g dans un nouveau repère d'unité graphique 1 cm.
 - c) Quelle est la position de M sur (C), pour laquelle l'aire du triangle OMH est maximale ?



CORRIGE**Exercice 1**

1. Faux.

En effet :

$$\text{On a : } \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{5}} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) = 1 + i \tan \frac{2\pi}{5} \neq 1 + i \tan \frac{3\pi}{5}, \tan \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ et } \tan \frac{3\pi}{5} < 0.$$

2. Faux

En effet : prenons $x=17$ et $y=34$, d'où $x < y$ et $x \wedge y = 17$.Et pourtant : $x^3 \cdot y^2 = 5679428$.

3. Faux.

En effet : soit $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$, donc $f(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}}, \text{ d'où } f'(2) = \frac{11}{6\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{12}.$$

La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de la fonction f est d'équation

$$y = f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = \frac{11\sqrt{2}}{12}(x-2) + 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Prenons } x = -\frac{2}{5}, \frac{11\sqrt{2}}{12} \left(-\frac{2}{5} - 2 \right) + 3\sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{12} \left(-\frac{12}{5} \right) + 3\sqrt{2} = -\frac{11\sqrt{2}}{5} + 3\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} \neq 0 \text{ donc}$$

cette tangente ne passe pas par le point $A \left(-\frac{2}{5}, 0 \right)$.**Exercice 2 (4 points)**Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

$$1. z_A = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

$$\text{et } z_C = 1 + i\sqrt{3} = \overline{z_A} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

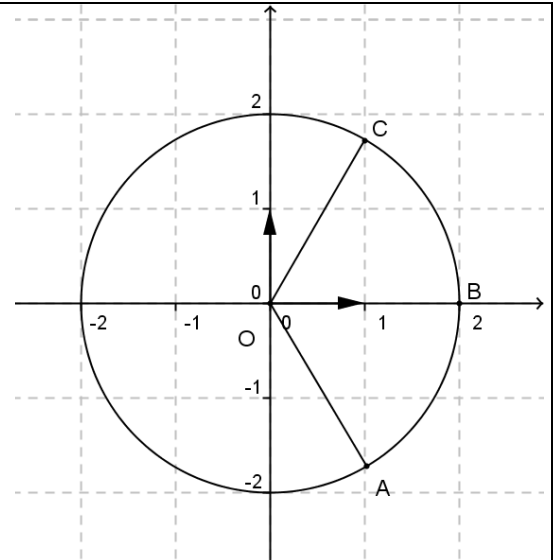
$$2. \text{ On a : } Z_{\overline{OA}} = z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{Et } Z_{\overline{CB}} = z_B - z_C = 2 - (1 + i\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Donc $\overline{OA} = \overline{CB}$ d'où OABC est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overline{AC} \perp \overline{OB}$$

Donc OABC est un losange.



3. a) $z_A + \bar{z}_A - 2 = 1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} - 2 = 0$ et $z_C + \bar{z}_C - 2 = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} - 2 = 0$ donc A et C sont deux points de (Δ) .

b) Posons $z = x + iy$ où x et y sont réels,

$$M(z) \in (\Delta) \Leftrightarrow z + \bar{z} - 2 = 0 \Leftrightarrow x + iy + x - iy - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc (Δ) est la droite d'équation $x = 1$.

4. A tout point M d'affixe z tel que $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{4}{2-z}$.

$$a) z_{A'} = \frac{4}{2-z_A} = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = 4 \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = 1-i\sqrt{3} = z_A \text{ donc } A' = A.$$

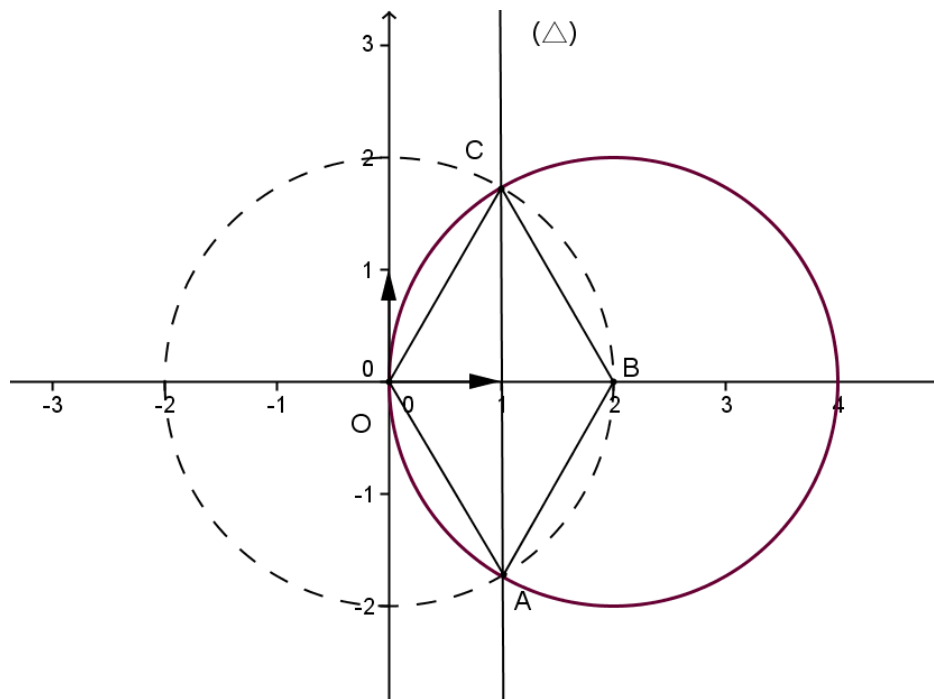
$$z_{C'} = \frac{4}{2-z_C} = \frac{4}{1-i\sqrt{3}} = 4 \frac{1+i\sqrt{3}}{4} = 1+i\sqrt{3} = z_C \text{ donc } C' = C.$$

$$b) \text{ Pour tout nombre complexe } z \neq 2, |z' - 2| = \left| \frac{4}{2-z} - 2 \right| = \left| \frac{2z}{2-z} \right| = \frac{|2z|}{|2-z|} = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

c) (Δ) est la médiatrice du segment $[OB]$ donc lorsque M décrit (Δ) , $MO = MB$ ou encore

$$|z| = |z-2| \text{ d'où } \frac{|z|}{|z-2|} = 1 \text{ donc } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|} = 2 \text{ donc } BM' = 2.$$

Ainsi, l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Δ) est le cercle de centre B et de rayon 2.



Exercice 3

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3, n \geq 0 \end{cases}$$

3. On a : $x_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$.

On suppose que : $x_n = 2^{n+1} + 1$, où n est un entier naturel, et on montre que : $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

$$x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 1.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.

4. a) $x_8 = 2^9 + 1 = 513 = 3^3 \times 19$ et $x_9 = 2^{10} + 1 = 1025 = 5^2 \times 41$ donc $x_8 \wedge x_9 = 1$.

On a : $x_{202} = 2^{203} + 1$ et $x_{203} = 2^{204} + 1$.

$$2^{204} = 1 \times (2^{203} + 1) + 2^{203}$$

$$2^{203} + 1 = 1 \times 2^{203} + 1$$

Donc $x_{202} \wedge x_{203} = 1$.

On en déduit que x_8 et x_9 d'une part et pour x_{202} et x_{203} d'autre part sont premiers entre eux.

b) On a : $x_n = 2^{n+1} + 1$ et $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

$$2^{n+2} = 1 \times (2^{n+1} + 1) + 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} + 1 = 1 \times 2^{n+1} + 1$$

Donc $x_n \wedge x_{n+1} = 1$. Par suite, x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux, pour tout entiers n .

4. a) On a : $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$

On suppose que : $2x_n - y_n = 5$ et on montre que $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$.

$$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3) = 2(2x_n - y_n) - 5 = 10 - 5 = 5.$$

Donc pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.

c) Pour tout entier naturel n , $y_n = 2x_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = 2^{n+2} - 3$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + 2u_n}$ pour tout $n \geq 0$

1. $u_1 = \frac{u_0}{2 + 2u_0} = \frac{1}{4}$ et $u_2 = \frac{u_1}{2 + 2u_1} = \frac{1}{10}$.

2. Soit n un entier naturel. si $u_n > 0$ alors $2 + 2u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.

Par suite, pour tout entier n , $u_n > 0$.

D'où pour tout entier naturel n , on a : $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.

3. Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2 + 2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(2 + 2u_n)}{2 + 2u_n} = -\frac{u_n(1 + 2u_n)}{2 + 2u_n} < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Il en suit : pour tout entier n , $0 < u_n \leq u_0$ d'où $0 < u_n \leq 1$. Ainsi, la suite est bornée.

4. On pose $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n .

$$v_0 = \frac{1}{u_0} + 2 = 3, \quad v_1 = \frac{1}{u_1} + 2 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{1}{u_2} + 2 = \frac{17}{7}.$$

5. Comme pour tout entier n , $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \neq 0$ alors $v_n \neq 2$.

$$\text{D'autre part, } v_n = \frac{1}{u_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 2}.$$

6. Pour tout entier n , $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{2+2u_n}{u_n} + 2 = \frac{2}{u_n} + 4 = 2\left(\frac{1}{u_n} + 2\right) = 2v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

7. Pour tout entier n , $v_n = v_0 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$ donc $u_n = \frac{1}{v_n - 2} = \frac{1}{3 \cdot 2^n - 2}$.

$$2 > 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot 2^n + 2 = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

La courbe représentative (C) à la page 3-3 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0, 6]$. (T) est la tangente à (C) au point A d'abscisse 2.

1. Lecture graphique.

$$\text{a) } f(2) = 3, \quad f(0) = 6 \quad \text{et} \quad f'(2) = -\frac{3}{2}.$$

b) On a d'une part, La courbe (C) est située au dessus de (T) sur l'intervalle $[0, 6]$ et d'autre part, une équation de la tangente (T) est $y = -\frac{3}{2}(x-2) + 3 = -\frac{3}{2}x + 6$.

$$\text{Donc pour tout } x \text{ de } [0, 6], \quad f(x) \geq -\frac{3}{2}x + 6.$$

2. On suppose que pour tout x de $[0, 6]$, $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$.

$$\text{a) Pour tout } x \text{ de } [0, 6], \quad f'(x) = -a \cdot \frac{2x}{(x^2 + b)^2} = -\frac{2ax}{(x^2 + b)^2}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} f(0) = 6 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 6 \\ \frac{a}{4+b} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b \\ a = 12 + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b \\ 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 4 \end{cases}.$$

$$\text{c) Pour tout } x \text{ de } [0, 6], \quad f(x) = \frac{24}{x^2 + 4} \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 + 4)^2} \leq 0$$

Le tableau de variation de f est :

x	0	6
f'(x)	0	-
f(x)	6	$\frac{3}{5}$

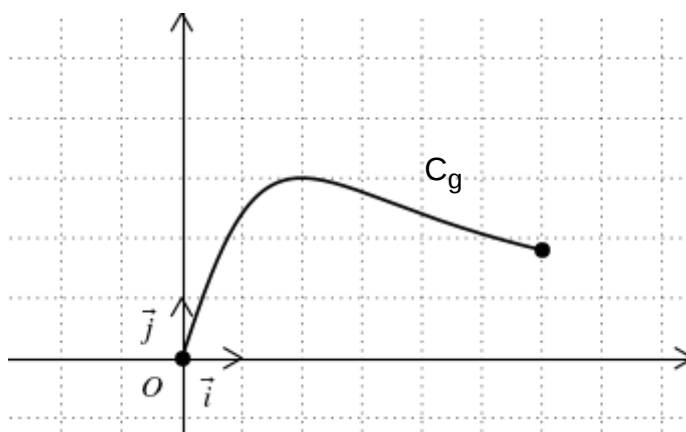
3. Soit M un point de (C) d'abscisse x. H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On appelle g(x) l'aire du triangle OMH.

a) Pour tout x de $[0, 6]$, $g(x) = \frac{1}{2}x.f(x) = \frac{12x}{x^2 + 4}$.

$$g'(x) = \frac{12(x^2 + 4) - 12x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{12(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-12(x - 2)(x + 2)}{(x^2 + 4)^2}.$$

x	0	2	6
g'(x)	+	0	-
g(x)	0	3	$\frac{9}{5}$

b) la courbe représentative de g dans un nouveau repère d'unité graphique 1 cm est :



c) Lorsque M est confondu avec B, l'aire du triangle OMH est maximale est vaut 3.