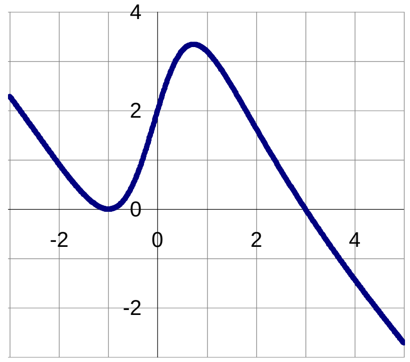
LYCEE IBN KHALDOUN – RADES | DEVOIR DE CONTROLE N°1 | 4 M1 *** DUREE : 2h

Mr ABIDI Farid | MATHEMATIQUES | Mercredi 31 /10 / 2012

Exercice 1 (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux trois propositions suivantes. La justification est exigée.

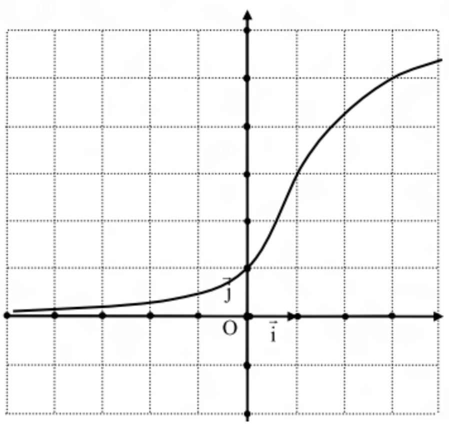
1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f' dans un repère orthonormé du plan.
   Si f(2) = - f(0) alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans [0, 2].



2. les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = -\frac{1}{n+1}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.
3. Soit le nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{1-i} e^{i\frac{\pi}{3}}$; alors $\arg(z) \equiv -\frac{7\pi}{12} [2\pi]$.

Exercice 2 (3 points)

La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. La droite des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et la courbe (C) admet une branche infinie de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.



1. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$
2. Déterminer $f\circ f([0,1])$.
3. a) Vérifier que 0 est une solution de l'équation (E) : $f\circ f(x) = 3$.
   b) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation (E).

Exercice 3 (5 points)

1. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $v_n = \frac{n+1}{n^4}$. Déterminer la limite de la suite (v_n) .
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n+k)^5}$.

   a) Prouver que pour tout entier k de $\{1,2, \dots , n\}$, $\frac{k}{32n^5} \le \frac{k}{(n+k)^5} \le \frac{k}{n^5}$.

   b) En déduire que, pour tout entier n non nul , $\frac{v_n}{64} \le u_n \le \frac{v_n}{2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite .

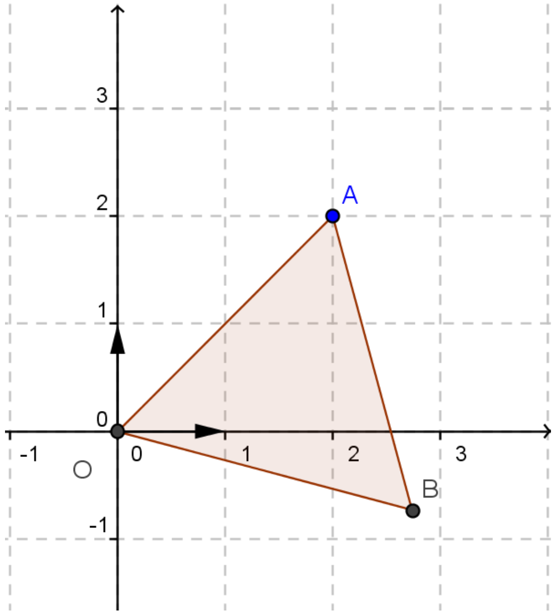
3. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(-1)^k}{(n+k)^5}$.

a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $|w_n| \leq u_n$.

b) Que peut-on conclure sur la convergente de la suite (w_n) ?

Exercice 4 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 2 + 2i et B le point tel que OAB soit un triangle équilatéral indirect.



1. a) Ecrire l'affixe de A sous forme exponentielle.
   b) Déterminer le module de l'affixe de B et montrer qu'un argument de l'affixe de B est $-\frac{\pi}{12}$.

2. a) Montrer que pour tout réels α et β,
$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.
   b) En déduire la forme exponentielle de l'affixe de K milieu de [AB].

3. Ecrire l'affixe de B sous forme algébrique.

Exercice 5 (5 points)

Dans tout l'exercice, θ est un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1. a) Déterminer, en fonction de θ, les racines carrées du nombre complexe $u = -2e^{-2i\theta}$.
   b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}e^{-i\theta}z + e^{-2i\theta} = 0$.

c) Montrer que les racines de l'équation (E) s'écrivent sous la forme $z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ et $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Calculer $\frac{z_1}{z_2}$. En déduire la nature du triangle OM_1M_2 .

b) On prend θ = $-\frac{\pi}{12}$, montrer que la droite (M_1M_2) passe par le point N d'affixe 1 – i.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Vrai

   En effet : La courbe représentative de f’ est située au dessus de l’axe des abscisses sur [0, 2] donc pour tout x de [0, 2] , f’(x) > 0 , d’où f est continue et strictement croissante sur [0, 2]. Comme f(2) = - f(0) alors l’équation f(x) = 0 admet une unique solution ∝ dans [0, 2].

2. Vrai

   En effet : pour tout entier n > 0,

   $a_n - b_n = -\frac{1}{n}$ donc $a_n < b_n$;

   $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc (a_n) est croissante ;

   $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \frac{1}{n+1} - a_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0$ donc (b_n) est décroissante ;

   $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

   Il en résulte : les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. Faux

   En effet : $\arg(z) \equiv \pi + \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - \arg(1-i)\,[2\pi] \equiv -\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \equiv -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$.

Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = 1$;

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x) = 1$;

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x) = +\infty$.

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f([0, 1]) = [f(0) , f(1)] = [1, 3]

   et f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = [3 , 5] donc $f\circ f([1,1]) = [3,5]$.

3. a) Comme $f\circ f(0) = f[f(0)] = f(1) = 3$ alors 0 est une solution de l’équation $f\circ f(x) = 3$.

4. b) $f\circ f(x) = 3 \Leftrightarrow f[f(x)] = f(1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ donc 0 est l’unique solution de l’équation $f\circ f(x) = 3$.

Exercice 3 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} = 0$.

2. a) Soit un entier $n > 0$, pour tout k appartenant à $\{1,2, \dots , n\}$:

$1 \le k \le n \Leftrightarrow n+1 \le n+k \le 2n \Leftrightarrow (n+1)^5 \le (n+k)^5 \le 32n^5$

Comme $n+1 \ge n$ alors $(n+1)^5 \ge n^5$ d'où $n^5 \le (n+k)^5 \le 32n^5$

Et par suite : $\frac{1}{32n^5} \le \frac{1}{(n+k)^5} \le \frac{1}{n^5}$, puis en multipliant par k : $\frac{k}{32n^5} \le \frac{k}{(n+k)^5} \le \frac{k}{n^5}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{32n^5} \le \sum_{k=1}^{k} \frac{k}{(n+k)^5} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^5} \Leftrightarrow \frac{1}{32n^5}\sum_{k=1}^{n} k \le u_n \le \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{32n^5}.\frac{n(n+1)}{2} \le u_n \le \frac{1}{n^5}.\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{32}.\frac{n+1}{n^4} \le u_n \le \frac{1}{2}.\frac{n+1}{n^4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{32}.v_n \le u_n \le \frac{1}{2}.v_n$.

c) Pour tout entier $n > 0$, $\Leftrightarrow \frac{1}{32}.v_n \le u_n \le \frac{1}{2}.v_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{32} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} v_n = 0$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. a) Pour tout entier $n > 0$, $|w_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k(-1)^k}{(n+k)^5}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{k(-1)^k}{(n+k)^5}\right|$ d'où $|w_n| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n+k)^5}$

Ainsi $|w_n| \le u_n$.

b) On a : pour tout $n > 0$, $|w_n| \le u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Exercice 4 :

1.a) A(2, 2) donc $z_A = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) OAB est un triangle équilatéral indirect donc

$|z_B| = OB = OA = |z_A| = 2\sqrt{2}$

Et $\arg(z_B) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})[2\pi] \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

2. a) Pour tout réel α et β,

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} .$$

b) Soit K le milieu de $[AB]$, $z_K = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = \sqrt{2}.2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)e^{i\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}}$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}.e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3. OAB est un triangle équilatéral indirect

$$\Leftrightarrow OA = OB \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow |z_A| = |z_B| \text{ et } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_B}{z_A}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_B}{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_B = z_A.e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z_B = (2+2i).\frac{1-i\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow z_B = (1+i).\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_B = 1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$$

Exercice 5 :

1. a) Les racines carrées de $u = -2e^{-2i\theta} = \left(i\sqrt{2}e^{-i\theta}\right)^2$ sont $i\sqrt{2}e^{-i\theta}$ et $-i\sqrt{2}e^{-i\theta}$.

b) On considère l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}e^{-i\theta}z + e^{-2i\theta} = 0$.

Son discriminant est $\Delta = \left(-\sqrt{2}e^{-i\theta}\right)^2 - 4e^{-2i\theta} = \left(i\sqrt{2}e^{-i\theta}\right)^2$.

Les racines de l'équation (E) sont : $z' = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\theta} - i\sqrt{2}e^{-i\theta}}{2}$ et $z'' = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\theta} + i\sqrt{2}e^{-i\theta}}{2}$.

c) $$z' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\theta} - i\sqrt{2}e^{-i\theta}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)e^{-i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = z_1$$

et $$z'' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\theta} + i\sqrt{2}e^{-i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.e^{-i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = z_2 \ .$$

2. a) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \ .$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -i \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow OM_1 = OM_2 \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

b) Si $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$:

$$z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{M_1N}}}{z_{\overrightarrow{M_1M_2}}}=\frac{1-i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=\frac{2-\sqrt{3}+i}{\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{\left[\left(2-\sqrt{3}\right)-i\right]\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-i\left(\sqrt{3}+1\right)\right]}{8}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)-i\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1N}}}{z_{\overrightarrow{M_1M_2}}}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1N}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires d'où la droite $\left(M_1M_2\right)$ passe par le point N d'affixe $1-i$.