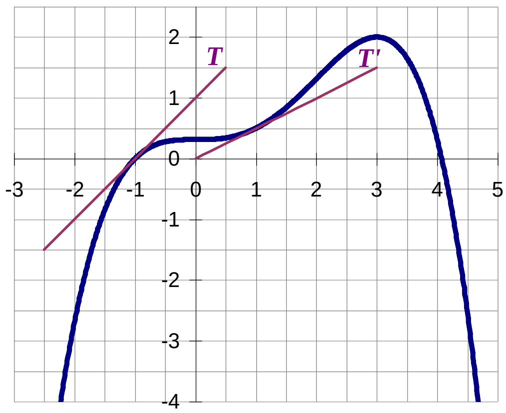
LYCEE IBN KHALDOUN – RADES | DEVOIR DE SYNTHESE N°1 | 4 M_1 *** DUREE : 3 h

Mr ABIDI Farid | MATHEMATIQUES | Mardi 04 /12 / 2012

EXERCICE 1 (3 *points*)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que f(0) = 0. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f . Les droites T et T' sont tangentes à la courbe de f' aux points d'abscisses respectives -1 et 1.



1. Pour tout x de $[-1,1]$, $x+1 \leq f'(x) \leq 2x+2$.
2. Pour tout x de $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$.
3. Il existe c appartenant à]-1, 3[tel que La fonction $f''(c) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2: *(5 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère un point M d'affixe m = a + ib où a et b sont réels.

On considère l'équation (E_m) : $z^3+(2-i)z^2+(m^2+1-2i)z-i(1+m^2)=0$.

1. a) Développer $(z-i)(z^2+2z+1+m^2)$.

   b) Résoudre l'équation (E_m). On distinguera deux cas : m= 0 puis $m \neq 0$.
2. On note N, P et Q les points d'affixes respectives i , $b-1-ia$ et $-b-1+ia$.
   a) Montrer que : (les points N, P et Q sont alignés) $\Leftrightarrow a+b=0$.
   Dans toute la suite de l'exercice, **on suppose que b = -a**.
   b) Montrer que les points N, P et Q appartiennent à la droite (D) d'équation $y=x+1$.
   c) Montrer que les droites (MP) et (ON) sont perpendiculaires et que Q est le symétrique de P par rapport au point R d'affixe -1.
   d) Faire une figure pour a = 2.

Exercice 3: *(6 points)*

A- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et (D) une droite du plan. On considère l'isométrie $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_D$

On suppose connus :

Si $\vec{u}$ est vecteur directeur de (D) alors φ est la symétrie glissante d'axe (D) et de vecteur $\vec{u}$.

Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à (D) alors φ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Montrer que : si $\vec{u}$ n'est ni vecteur directeur de (D) , ni normal à (D) alors φ est une symétrie glissante.

B- Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note I le milieu du segment [AB] et J le symétrique de I par rapport à B. Soit D le point tel que BJDC soit un parallélogramme. On désigne par Δ la médiatrice de [AJ]. On désigne par K le milieu du segment [BJ]. Voir figure à la page 4/4.

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g qui envoient A sur J et C sur D.
2. a) Caractériser l'antidéplacement g.

   b) Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
3. La parallèle à la droite (AC) passant par B coupe (DJ) en E. On pose $h = g \circ t_{\overrightarrow{BF}}$.

Montrer que h est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

4. Une unité de longueur choisie, on suppose que AB = 2 , on note L le point de la perpendiculaire en A à la droite (AB) tel que AL = 1 et on mène le plan au repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AL}\right)$.

   On note F le centre la rotation f et z_F son affixe.

   a) Donner l'affixe z_J de J et z_C celle de C.

   b) Montrer que $z_J = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z_F + z_F$. En déduire z_F.

   c) Calculer $\frac{z_F}{z_C}$. En déduire une construction du point F.

Exercice 4: *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par f(x) = $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1. a) Monter que pour tout x de $[0,1]$, $f'(x)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ puis calculer $f''(x)$.

   b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

   c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point I.

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

   On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

   b) Quelle fonction représente la courbe (Γ) tracée ci-dessous ? Justifier.

3. a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]0, 1[et que pour tout x de]0, 1[, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}$.

   b) En déduire une équation de la tangente à (C') au point I.

4. On pose pour tout entier naturel n > 0 , $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

   a) Montrer que pour tout n > 0, $f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\leq U_n\leq f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

5. On pose pour tout entier naturel n > 0 , $V_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{n+k-1}{n+k}\right)$.

   a) Montrer que pour tout x de [0, 1], $f^{-1}(1-x)+f^{-1}(x)=1$.

   b) Montrer alors que pour tout n > 0, $V_n=1-U_n$.

   Que peut-on conclure sur la convergence de la suite (V_n) ?

Annexe à compléter et à rendre avec la copie
figure de l'exercice 3

Nom de l'élève :

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Faux.

Nous présentons deux méthodes :

- ✓ On a $f'(1)=\frac{1}{2}$ donc il est impossible que $1+1\le f'(1)\le 2\times 1+1 \Leftrightarrow 2\le f'(1)\le 3$.
- ✓ Une équation de la tangente (T) est $y=f''(x)(x+1)+f'(-1)=x+1$ et une équation de la tangente (T') est $y=f''(1)(x-1)+f'(1)=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x$.

Sur l'intervalle [-1, 1] , la courbe représentative de f' est au dessus de (T') et en dessous de (T) donc pour tout x de [-1, 1] , $\frac{1}{2}x\le f'(x)\le x+1$.

2. Vrai.

En effet : f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ et pour tout x de $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$ donc pour tout x de $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, $|f(x)-f(0)|\le\frac{1}{2}|x-0|\Leftrightarrow|f(x)|\le\frac{1}{2}|x|$.

3. Vrai

En effet : f' est continue sur [-1 , 3] et dérivable sur]-1, 3[donc il existe un réel c de]-1, 3[tel que $f''(c)=\frac{f'(3)-f'(-1)}{3-(-1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Exercice 2 :

1. a) Pour tout nombre complexe z , $(z-i)(z^2+2z+1+m^2)=z^3+2z^2+m^2z-iz^2+2iz-i-im^2$

$$=z^3+(2-i)z^2+(1+m^2-2i)z-i(1+m^2)$$

b) $(E_m)\Leftrightarrow(z-i)(z^2+2z+1+m^2)=0\Leftrightarrow z=-i$ ou $z^2+2z+1+m^2=0$

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2+2z+1+m^2=0$, nous donnons la méthode que la plus part des élèves ont utilisée :

Le discriminant réduit est $\Delta'=1-(1+m^2)=-m^2=(im)^2$,

Si $m=0$, il existe une seule solution $z_0=-1$ donc $S=\{i,-1\}$

Si $m\ne 0$, les solutions sont : $z_1=-1-im$ et $z_1=-1+im$ donc $S=\{i,-1-im,-1+im\}$

2. a) M, N et P sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NQ}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} b-1 & -b-1 \\ -a-1 & a-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(b-1)(a-1)-(-a-1)(-b-1)=0$$

$\Leftrightarrow -2a-2b=0\Leftrightarrow a+b=0$.

b) Soit (D) la droite d'équation y = x + 1 .

Si b = -a alors :

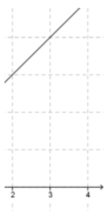
N(0, 1) appartient à D

P(-a-1, -a) donc $y_P = -a$ et $x_P = -a-1$ d'où $y_P = x_P + 1$ donc P appartient à D.

Comme les points N, P et Q sont alignés alors Q appartient aussi à (D).

c) Si b = -a : $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 2a+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{ON} = 0$ donc $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{ON}$ donc les droites (MP) et (ON) sont perpendiculaires.

d) Si a = 2 : M(2, 2) , N(0, 1) , P(-3, -2) et Q(1, 2).



Exercice 3 :

A- On pose $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur normal à (D).

$\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}} \circ S_D = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} \circ S_D = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ S_{D'}$ où la droite D' est l'image de D par la translation $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u_1}}$.

B- 1. ABC est un triangle équilatéral donc AC = CB et BGDC est un parallélogramme donc CB= JD.

D'où AC = JD et A $\neq$ C , donc il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g qui envoient A sur J et C sur D.

2. a) On a : J est le symétrique de I par rapport B donc $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BJ}$ et BJDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CD}$. IL en résulte : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CD}$, d'où IBDC est un parallélogramme. Comme (CI) est la médiatrice de [AB] alors (CI) est perpendiculaire à (IB). Par suite , IBDC est un rectangle.

Or (Δ) est la médiatrice de [AJ] donc (Δ) est la médiatrice de [IB] donc (Δ) est la médiatrice de [CD].

Ainsi , g est un antidéplacement et les segments [AJ] et [CD] ont la même médiatrice (Δ) , donc g est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

b) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{JD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. $h=g\circ t_{\overrightarrow{BE}}=S_\Delta\circ t_{\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KE}}=S_\Delta\circ t_{\overrightarrow{BK}}\circ t_{\overrightarrow{KE}}=S_\Delta\circ S_\Delta\circ S_{\Delta'}\circ t_{\overrightarrow{KE}}=S_{\Delta'}\circ t_{\overrightarrow{KE}}$ où $\Delta'=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}}(\Delta)$.

4. a) Comme $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AI}$ alors $z_J=3$.

ABC est un triangle équilatéral direct et I milieu de [AB] donc :

$|z_C|=AC=AB=2$ et $\arg(z_C)\equiv\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où $z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) L'écriture complexe de f , rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $z'-z_F=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_F)$.

f(A) = J $\Leftrightarrow z_J-z_F=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A-z_F)\Leftrightarrow z_J-z_F=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z_F\Leftrightarrow z_J=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z_F+z_F$.

D'où $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)z_F=z_J\Leftrightarrow\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)z_F=3\Leftrightarrow\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)z_F=3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow z_F=\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{z_F}{z_C}=\frac{\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{2}$ donc $\frac{z_{\overrightarrow{AF}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ est réel d'où les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par suite : $F\in(AC)$.

Comme l'abscisse de F est $\frac{3}{2}$ alors $F\in(\Delta)$.

F est donc le point d'intersection des droites (AC) et (Δ).

Exercice 4 :

1.a) Pour tout x de $[0,1]$, $f'(x)=2\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$.

$f''(x)=\frac{\pi^2}{2}\cos(\pi x)$.

b) $f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos(\pi x)=0$ et $x\in[0,1] \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
πx	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(\pi x)$		+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ donc la courbe (C) admet un point d'inflexion I de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

c) L'équation de la tangente (T) à (C) au point I est :

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

4. a) On a pour tout x de $[0,1]$, $f'(x)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$, comme $\pi x\in[0,\pi]$ alors $f'(x)\geq 0$

et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$.

Ainsi : f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]$.

c) La courbe (Γ) est celle de la fonction f^{-1} car f est dérivable à droite en 0 donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en f(0) = 0.

5. a) f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de]0, 1[donc f^{-1} est dérivable sur]0, 1[.

$$\begin{cases} x\in]0,1[\\ f(x)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in]0,1[\\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$x\in]0,1[\Rightarrow x\frac{\pi}{2}\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)>0 \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)>0.$$

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\sqrt{y}$$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\sqrt{1-y}$.

Il en résulte : $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{y}\sqrt{1-y}}=\dfrac{1}{\pi\sqrt{y-y^2}}$

Donc , pour tout x de]0, 1[, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}$.

b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point I est :

$$y=\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}x-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

4. On pose pour tout entier naturel n > 0 , $U_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$.

a) Pour tout n > 0, $1\le k\le n\Leftrightarrow n+1\le n+k\le 2n\Leftrightarrow \dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{n+k}\le\dfrac{1}{n+1}$.

Comme f^{-1} est strictement croissante sur [0, 1] alors

$$\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)\le f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)\le\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow n.f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)\le n.f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)\le f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le U_n\le f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

b) Pour tout n > 0 , $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right)\le U_n\le f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0^+ \text{ et } \lim_{x\to0^+}f^{-1}(x)=0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)=0$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

Donc la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

5. On pose pour tout entier naturel n > 0 , $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{n+k-1}{n+k}\right)$.

a) Posons : pour tout x de [0, 1] , g(x) = $f^{-1}(1-x) + f^{-1}(x)$.

g est dérivable sur [0, 1] et pour tout x de [0, 1] ,

$$g'(x) = -\left(f^{-1}\right)'(1-x) + \left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}} = 0$$

Donc g est fonction constante sur [0, 1] d'où pour tout x de [0, 1] ,

g(x) = $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi , pour tout x de [0, 1], $f^{-1}(1-x) + f^{-1}(x) = 1$.

b) Pour tout n > 0 et pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{n+k-1}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)\right) = n - \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) = n - nU_n .$$

D'où , pour tout n > 0, $V_n = 1 - U_n$.

(U_n) converge donc (V_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-U_n) = 1$.