

Exercice 1: (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant la réponse :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = -1 \quad ; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} = 1 \quad ; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2 : (4 points)

Ci-dessous, (C) est la courbe de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

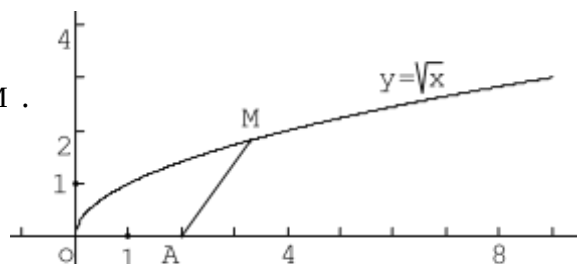
On pose A(2, 0) et M un point de (C) d'abscisse x ce qui revient à dire que le point M décrit la courbe (C) .

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = AM$.

1. Vérifier que pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer alors la distance minimale entre A et M .
4. Déterminer les coordonnées du point H de (C) le plus près de A.



Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(\pi x)$.

1. Etudier la parité de f et déterminer sa période.
2. a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, 1]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0, 1]$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2]$.

Exercice 4 : (4 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

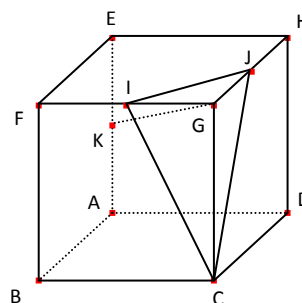
1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que le nombre $n^2 + n$ n'est pas premier ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $8^n - 1$ est divisible par 7.
b) En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 7.
3. 2. a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 383 et 127 sont premiers entre eux.
b) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation $383x = 127y$.

Exercice 5 : (4 points)

Soit le cube ABCDEFGH de côté 1.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [FG], [HG] et [AE].

Soit le repère $\left(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE} \right)$.



1. Déterminer les coordonnées des points K, G, I et J.
2. Calculer $\vec{KG} \cdot \vec{CI}$, $\vec{KG} \cdot \vec{CJ}$. En déduire que la droite (GK) est perpendiculaire au plan (CIJ).
3. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right)$.
a) Montrer que L est le point d'intersection du plan (CIJ) et de la droite (GK).
b) L est-il l'orthocentre du triangle CIJ ?

CORRIGE**Exercice 1:**

1. Vrai

$$\text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} = -1 ;$$

2. Faux

$$\text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \cdot \sqrt{x} = 0 ;$$

3. Faux

$$\text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{(3x)^2} \cdot 9 = \lim_{x \rightarrow 0} -9 \cdot \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} = -\frac{9}{2}$$

Exercice 2 :

Ci-dessous, (C) est la courbe de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On pose A(2, 0) et M un point de (C) d'abscisse x ce qui revient à dire que le point M décrit la courbe (C).

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = AM$.

1. Pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$f(x) = AM = \sqrt{(x-2)^2 + (f(x)-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 4$ est dérivable et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc f est

dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x positif, $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$.

$f'(x)$ est du signe de $2x - 3$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	2	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$+\infty$

3. f admet sur $[0; +\infty[$ un minimum $\frac{\sqrt{7}}{2}$ en $\frac{3}{2}$ d'où la distance minimale entre A et M est $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
4. Soit H le point de la courbe (C) le plus proche de A . L'abscisse de H est $\frac{3}{2}$ et son ordonnée est $\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc le point de (C) le plus près de A est $H \left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(\pi x)$.

1. f est paire et périodique de période $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

2. a) Pour tout x réel, $f'(x) = -2\pi \sin(\pi x)$.

$$b) \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -2\pi \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \pi x \leq \pi \\ \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \pi x \leq \pi \\ \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

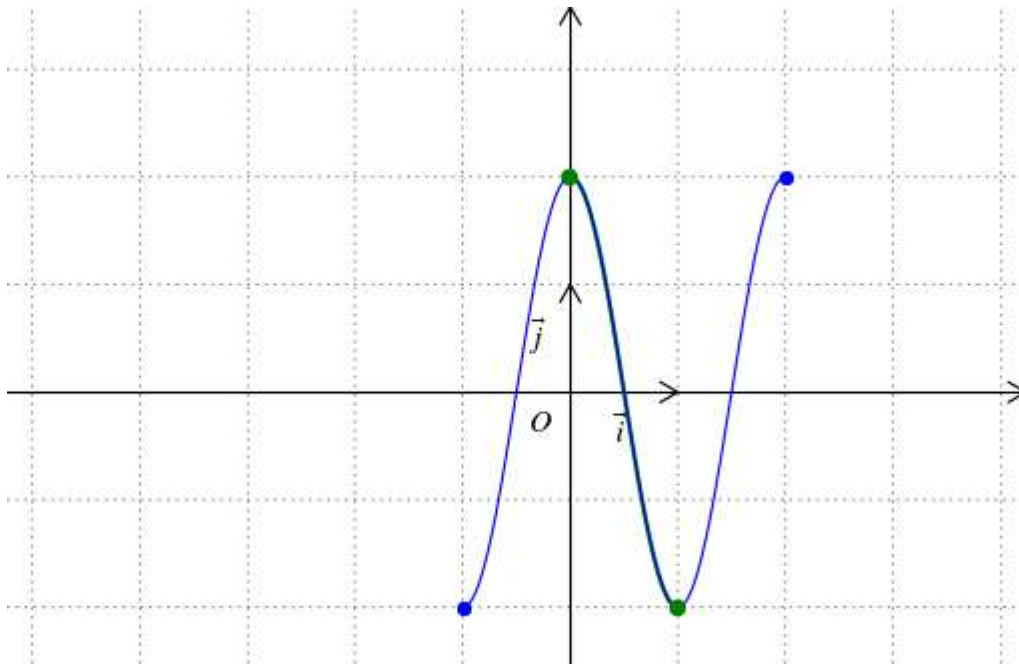
- c) Pour tout x de $]0, 1[$, $0 < \pi x < \pi$ donc $\sin(\pi x) > 0$ donc $f'(x) < 0$.

x	0	1
$f'(x)$	0	0

D'où le tableau de variation de f sur $[0, 1]$ est :

x	0	1
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	2	-2

3. La représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2]$.

**Exercice 4 :**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, le nombre $n^2 + n \geq 6$ et $n^2 + n = n(n+1)$ est paire donc $n^2 + n$ n'est pas premier.

Remarque :

pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $n^2 + n = n(n+1)$.

On a : $n \geq 2$ et n divise $n(n+1)$ donc $n^2 + n$ n'est pas premier.

2. a) On a : $8^0 - 1 = 0$ est divisible par 7.

On suppose que $8^n - 1$ est divisible par 7, pour un certain entier naturel n , et on montre que $8^{n+1} - 1$ est divisible par 7.

$$8^{n+1} - 1 = 8 \times 8^n - 1 = 8(8^n - 1) + 7 \text{ est divisible par 7.}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $8^n - 1$ est divisible par 7.

b) On a : $2013 = 3 \times 671$ donc $2^{2013} = 2^{3 \times 671} = 8^{671}$. Or $8^{671} - 1$ est divisible par 7, donc il existe un entier naturel q tel que $8^{671} - 1 = 7q$ d'où $8^{671} = 7q + 1$.

Ainsi, le reste de 2^{2013} dans la division euclidienne par 7 est 1.

3. a) On a :

$$383 = 127 \times 3 + 2$$

$$127 = 2 \times 63 + 1$$

Donc $383 \wedge 127 = 1$ d'où 383 et 127 sont premiers entre eux.

b) On a : $383x = 127y$ donc 383 divise $127y$. Or 383 et 127 sont premiers entre eux, donc 383 divise y d'où il existe un entier naturel q tel que $y = 383q$.

il en résulte : $383x = 127y = 127 \cdot 383q$ d'où $x = 127q$.

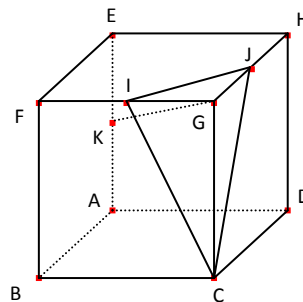
La réciproque : si $(x, y) = (127q, 383q)$, avec $q \in \mathbb{N}$, alors $383x = 383(127q) = 127(383q) = 127y$.

Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation $383x = 127y$ est $\{(127q, 383q), q \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5 :

Soit le cube ABCDEFGH de côté 1. On note I, J et K les milieux respectifs des segments [FG], [HG] et [AE] et on considère le repère $\left(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$.

1. $K\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $G(1, 1, 1)$, $I\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.



2. $\vec{KG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{CI} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{CJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{KG} \cdot \vec{CI} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ et $\vec{KG} \cdot \vec{CJ} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$.

D'où le vecteur est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{CI}$ et $\vec{CJ}$. On en déduit que la droite (GK) est orthogonale à chacune des droites (CI) et (CJ). Par suite, la droite (GK) perpendiculaire au plan (CIJ).

3. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

$$a) \quad \vec{GL} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{7}{18} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{GL} = \frac{7}{9} \vec{KG} \quad \text{donc} \quad L \in (KG). \quad \vec{CL} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \quad \text{donc}$$

$$\vec{KG} \cdot \vec{CL} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0 \quad \text{donc} \quad L \in (CIJ).$$

Ainsi, L est le point d'intersection du plan (CIJ) et de la droite (GK).

Remarque :

$$\det(\vec{CI}, \vec{CJ}, \vec{CL}) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 1 & 1 & \frac{8}{9} \end{vmatrix} = 0 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{9} \\ 1 & \frac{8}{9} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{2}{9} \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 0 \quad \text{donc les points}$$

C, I, J et L sont coplanaires d'où $L \in (KG)$.

$$b) \quad \text{On a } \vec{CL} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{IJ} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \vec{CL} \cdot \vec{IJ} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 0 = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{CL} \perp \vec{IJ}.$$

$$c) \quad \text{On a } \vec{LJ} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{CI} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \vec{LJ} \cdot \vec{CI} = 0 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{LJ} \perp \vec{CI}$$

Par suite, L est l'orthocentre du triangle CIJ.