

|                                             |                                                                     |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Lycée IBN KHALDOUN - RADES<br>Mathématiques | <i>Devoir de contrôle n°3</i>                                       |
| Prof : ABIDI Farid                          | 4 <sup>e</sup> M 1 *** Mercredi 25 - 04 - 2012 *** Durée : 2 heures |

**Exercice 1:** 4 points

Répondre par Vrai au Faux aux propositions suivantes. Justifier la réponse.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e^x = -\infty$ .
2. La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{2^x}{4^x - 1}$  est paire.
3. La fonction  $x \mapsto 3\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)$  est une solution de l'équation  $y'' + \pi^2 y = 0$ .
4. Si  $A$  et  $B$  sont événements indépendants d'un même univers muni d'une probabilité  $p$  tels que  $p(A) = 0,1$  et  $p(B) = 0,5$  alors  $p(A \cup B) = 0,6$ .

**Exercice 2:** 4 points

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$ .

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ .  
Vérifier que la fonction  $f$  est une solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si la fonction  $(\varphi - f)$  est solution de (E') :  $y' + 2y = 0$ .
3. Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).
4. En déduire la solution  $h$  de (E) qui vérifie  $h(0) = -\ln 3$ .

**Exercice 3:** 6 points

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

$U_1$  contient quatre boules rouges et trois boules vertes.

$U_2$  contient deux boules rouges et une boule verte.

A- On tire au hasard une boule de  $U_1$  et on la met dans  $U_2$ , puis on tire au hasard une boule de  $U_2$ .  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges et l'urne  $U_2$  après les deux tirages précédents.

1. Démontrer que la probabilité  $p(X = 2)$  est égale à  $\frac{9}{14}$ .
2. Donner les trois valeurs de  $X$  et déterminer la loi de probabilités de  $X$ .

B- Dans cette partie, les boules rouges portent chacune le nombre 1 et les boules vertes chacune le nombre -1. On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne choisie.

On considère les événements suivants :

E : « l'urne choisie est  $U_1$  »

F : « la somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 0 ».

1. a) Calculer  $p(F|E)$  et  $p(F|\bar{E})$ .

b) Dédurre que  $p(F) = \frac{13}{21}$ .

2. Soit G l'évènement « la somme des nombres portés par les deux boules tirées est égal à -2 ».

Calculer  $p(G)$ .

#### Exercice 4: 6 points

Dans la figure ci-contre, on donne le prisme à base triangulaire OABCDE tel que :  $OA = OB = 1$ ,  $OC = 2$ , OAB est un triangle rectangle en O,  $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{OB}$ .

On suppose que l'espace est rapporté au repère

orthonormé direct  $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$ .

1. Donner les coordonnées des points D et E.

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (AD) et (BE).

b) Montrer que les droites (AD) et (BE) se coupent au point I(0,0,-1).

3. Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en D.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Vérifier que  $h(O) = C$  et  $h(B) = E$ .

c) Calculer le volume de chacun des tétraèdres IOAB et ICDE puis déduire celui du prisme OABCDE.

4. Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 1 = 0$ .

a) Montrer que (S) est une sphère de centre I et passant par A.

b) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et du plan (OAB).

c) Déterminer (S') l'image de (S) par h et donner l'intersection de (S') et du plan (CDE).

