Exercice 1 : (2,5 points)

Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' soit continue sur $\mathbb{R}$.
Soit a et b deux réels.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)dx$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.Soit (*C*) la courbe représentative de la fonction f et (*C'*) celle de la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x f'(x)$ qui s'annule en 0. On suppose que (*C'*) passe par le point I(1 ;-1,2).

Calculer l'aire A de la partie hachurée (voir annexe page 4/4).

Exercice 2: (2,5 points)

1. Enoncer lemme de Gauss et théorème de Bézout.

2. Répondre, sans aucune justification, par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

a) Si $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv 2(\text{mod}\,10)$ alors $a \equiv 2(\text{mod}\,5)$ et $a \equiv 2(\text{mod}\,2)$.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, a, b et c trois entiers tels que $a \equiv b(\text{mod}\,n)$ et $a \equiv c(\text{mod}\,n)$ alors $a^2 \equiv bc(\text{mod}\,n)$.

c) 2 est un inverse modulo 5 de 3.

Exercice 3: (5 points)

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x \, dx$.

1. a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} - 1$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$. Justifier que : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

3. Pour tout entier ≥ 2, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $S_n \leq u_n \leq S_n + \frac{\ln n}{n}$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4: (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe (Γ) d'équation $3x^2-y^2+1=0$.

1. a) Montrer que (Γ) est une hyperbole dont on précisera les sommets et les asymptotes.

   b) Déterminer un foyer de (Γ) et la directrice associée.

2. Soit I le point de (Γ) d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.

   Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en I.

Exercice 5: (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-3+4i$, $z_B=3-2i$ et $z_C=1$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{2}i\bar{z}+1-\frac{1}{2}i$.

1. Déterminer les images des points A et C par f .
2. Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le centre et le rapport.
3. a) Montrer que $\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

   b) En déduire l'axe de f.

Exercice 6: (4 points)

Dans un plan orienté, on considère un cercle (C) de centre O, de diamètre [AB] et de rayon 2. I et J sont deux points de (C) tels que $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Voir annexe ci-jointe à la page 3/3. Soit S la similitude directe de centre B qui transforme I en J.

1. Déterminer un angle de S et vérifier que son rapport est $\sqrt{3}$.
2. a) Montrer que l'image de la droite (AI) par S est (AJ).

   b) Déterminer et construire, sur l'annexe ci-jointe, Δ l'image de la droite (AB) par S.

   c) Déduire A' = S(A). Placer A'.
3. Déterminer l'image (C') de (C) par S.

Annexe à compléter et à rendre.

Nom de l'élève :

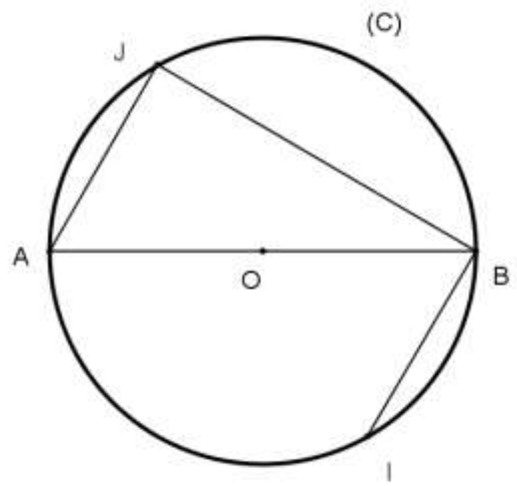

Figure de l'exercice 1