Exercice 1 :

I- 1) b) ; 2) c) .

II- 1) a) ; 2) b) .

Exercice 2 :

1) a) Pour tout entier naturel n , v $v_{n+1} = u_{n+1} - e = \frac{1}{e}u_n - 1 = \frac{1}{e}(u_n - e) = \frac{1}{e}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

b) Le premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = u_0 - e = -e$. Par conséquent, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$v_n = (-e)\left(\frac{1}{e}\right)^n = -\frac{1}{e^{n-1}}$.

c) On a $\frac{1}{e} \simeq 0,36$ donc $\frac{1}{e} \in \left]-1,1\right[$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - e \Leftrightarrow u_n = v_n + e$.

La suite (v_n) est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + e = e$.

Exercice 3 :

1) a) Le degré du sommet B du graphe est 3.
b) Le degré de B est impair donc le graphe (G) n'admet pas de cycle eulérien.

2) a) Le graphe (G) est connexe et seulement les sommets B et E sont de degrés impairs donc (G) admet au moins une chaîne eulérienne.

b) Un exemple d'une chaîne eulérienne est : $B-C-D-B-E-A-D-E$.

3) La matrice associée au graphe (G) est M = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

1) la fonction est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ et g(1) = 0.

Si 0 < x < 1, alors g(x) < g(1) donc g(x) < 0.

Si x > 1 , alors g(x) > g(1) donc g(x) > 0.

Résumons :

x	0		1		$+\infty$
g(x)	‖	-	0	+	

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x-1-\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$.

La droite d'équation x = 0 (droite des ordonnées) est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc la courbe ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique d'équation y = x – 1 au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est différence et quotient de fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

Pour tout x > 0, $f'(x) = 1-\left(\dfrac{\frac{1}{x}.x-1.\ln x}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) f'(x) = 0 $\Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

En utilisant la question 1), on obtient le tableau de variation de f :

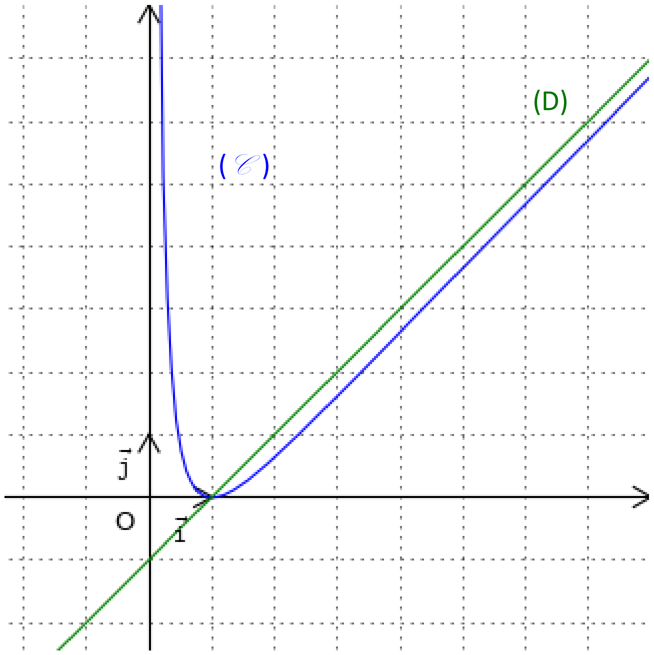
x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	‖
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖

4) a) Pour tout x > 0, f(x) – (x – 1) = $-\dfrac{\ln x}{x}$. Dressons alors le tableau de signe de f(x) – (x – 1) :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
f(x) –(x – 1)		+	0	-	
Position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D)		Au dessus		Au dessous	

(D) rencontre ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1.

b)



c) L'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) , la droite (D) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = 2 est :

$$\mathscr{A} = \int_1^e \left((x-1)-f(x)\right)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 = \frac{1}{2}.$$