

Exercice 1: (3 points)

On considère la fonction dont on donne le tableau de variations :

x	-5	-3	0	3	5
f(x)	3	-1	2	-3	-2

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- On est sûr que :
a) $f(2) = 0$; b) $f(2) > 0$; c) $f(2) \in [-3, 2]$.
- Le minimum de f est :
a) 3 ; b) -3 ; c) -5.
- L'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-5, 5]$:
a) Une seule solution ; b) Deux solutions exactement ; c) trois solutions exactement.
- a) f est paire ; b) $f([-3, 5]) = [-3, 2]$; c) $f(-4) \leq f(4)$.

Exercice 2: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

- Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La courbe C_f admet-elle une asymptote ?
- Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
- Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D .
- Montrer que le point $A(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f .

Exercice 3: (5 points)

Une unité de longueur étant choisie. On considère segment $[AB]$ de longueur 2. Soit C un point de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$ tel que $AC = 4$. On note C' le milieu de $[AB]$.

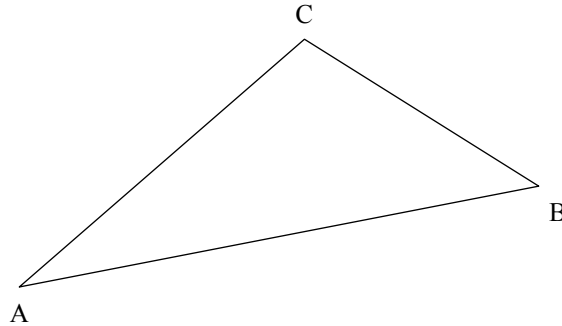
- Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{CB})$ puis les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ exprimés en degré.
- G étant le centre de gravité du triangle ABC .

Calculer $\vec{GA} \cdot \vec{GB}$. En déduire que $\widehat{AGB} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC}$.

Exercice 4: (7 points)

L'unité de longueur est le centimètre. On considère un triangle ABC tel que : $AB = 7$, $AC = 5$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$



1. a) Calculer la distance BC.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer la valeur exacte du sinus de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ exprimée en degrés et arrondie au dixième de degré près.

2. On appelle J le barycentre des points pondérés (A;2) et (B;5) .

a) Placer le point J sur la figure.

b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA} = -10$

c) Déterminer l'ensemble E' des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{MC} \cdot (2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}) = 0$

d) Déterminer l'ensemble F des points M du plan vérifiant l'égalité : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -7$

e) Déterminer l'ensemble F' des points M du plan vérifiant l'égalité : $2.MA^2 + 5.MB^2 = 133$

Exercice 1 :

1. c) ; 2.b) ; 3. c) ; 4.b)

Exercice 2 :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3) = 4 \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty.$$

La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. Remarquons que : $x^2+3 = (x+1)(x-1)+4$. Il en résulte que : pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = x+1 + \frac{4}{x-1}.$$

$$3. \left. \begin{array}{l} f(x) = x+1 + \frac{4}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc la courbe } C_f \text{ de } f \text{ admet pour asymptote oblique la droite } D: y = x+1.$$

$$4. x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq -1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Leftrightarrow 2-x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{et } f(2-x) + f(x) = 2-x+1 + \frac{4}{2-x-1} + x+1 + \frac{4}{x-1} = 4 + \frac{4}{1-x} + \frac{4}{x-1} = 2 \times 2$$

Donc $A(1;2)$ est un centre de symétrie de C_f .

Exercice 3 :

$$1. \text{ On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC' = 2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -BA \cdot BC' = -2$$

$$\text{et } \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{CC'}) = 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}) = 0.$$

ABC est un triangle isocèle de sommet principal C donc $\widehat{BAC} = \widehat{ABC}$.

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \Leftrightarrow AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \Leftrightarrow 8 \cos(\widehat{BAC}) = 2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } \widehat{BAC} = \widehat{ABC} \simeq 75,5^\circ.$$

$$\text{Il en résulte que } \widehat{ACB} = \pi - 2\widehat{BAC} \simeq 29^\circ.$$

$$2. \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A}) \cdot (\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'B}) = (\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A}) \cdot (\overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{C'A}) = GC'^2 - C'A^2$$

$$\text{Or } GC'^2 - C'A^2 = \left(\frac{1}{3}CC'\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}(AC^2 - AC'^2) - 1 = \frac{1}{9} \cdot 15 - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{D'autre part : } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \times GB \times \cos(\widehat{AGB}) = GA^2 \cos(\widehat{AGB}).$$

$$\text{Or } GA^2 = GC'^2 + AC'^2 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\text{Il en résulte que } \frac{8}{3} \cos(\widehat{AGB}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos(\widehat{AGB}) = \frac{1}{4}.$$

Les angles géométriques $\widehat{AGB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont même cosinus donc $\widehat{AGB} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC}$.

Exercice 4 :

1. a) En application de la formule d'Al-Kashi, on écrit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 74 - 35\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } BC = \sqrt{74 - 35\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) L'aire du triangle ABC est } \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{4}.$$

$$\text{c) D'après la formule des sinus, on a : } \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}.$$

$$\text{D'où } \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \Leftrightarrow \sin(\widehat{ABC}) = \sin(\widehat{BAC}) \times \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \sin(\widehat{ABC}) = \frac{5}{2\sqrt{74 - 35\sqrt{3}}}$$

Il en résulte qu'une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ est $43,1^\circ$.

$$2. \text{ a) J est barycentre de (A, 2) et (B, 5) } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{b) } M \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA} = -10 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{CA} = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{CA} = -10$$

$$\text{Or } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA} = -CH \cdot CA = -10, \text{ par conséquent :}$$

$$M \in E \Leftrightarrow 10 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{CA} = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{CA} = -20 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{CA}.$$

L'ensemble E est donc la perpendiculaire à (AC) passant par H.

$$\text{c) } M \in E' \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} (2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot (7\overrightarrow{MJ}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

Donc l'ensemble E' est le cercle de diamètre [CJ].

d) Remarquons d'abord que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{25}{4}$$

Par suite :

$$M \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -7 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = -7 \Leftrightarrow IM^2 = IA^2 - 7 \Leftrightarrow IM^2 = -\frac{3}{4}$$

Ainsi l'ensemble F est vide.

e) Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 5MB^2 &= 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA})^2 + 5(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 \\ &= 2(MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JA} + JA^2) + 5(MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JB} + JB^2) \\ &= 7MJ^2 + 2JA^2 + 5JB^2 + 2\overrightarrow{MJ}(2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB}) \\ &= 7MJ^2 + 50 + 20 \\ &= 7MJ^2 + 70 \end{aligned}$$

Il vient alors : $M \in F' \Leftrightarrow 2MA^2 + 5MB^2 = 133 \Leftrightarrow 7JM^2 + 70 = 133 \Leftrightarrow JM^2 = 9 \Leftrightarrow JM = 3$

Ainsi, l'ensemble F' est le cercle de centre J et de rayon 3.

