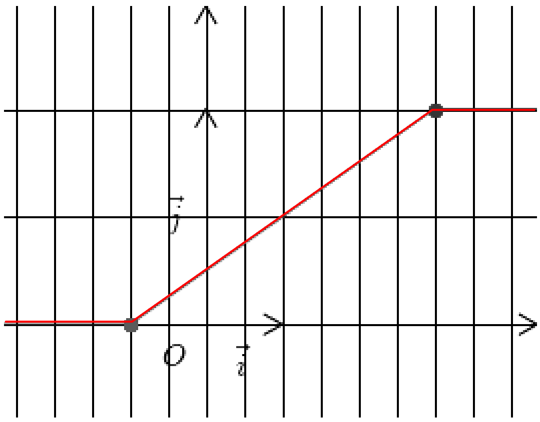
| Lycée Ibn Khaldoun – Radès<br>Mr ABIDI Farid | BAC BLANC – Mai 2009<br>Mathématiques | Classe : 4 $SE_3$<br>Durée : 3h |
|---|---|---|

**Exercice 1** : ( 3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. L'espérance mathématique de la loi binomiale B(10 ; 0,1) est :
   a) 0,1 b) 1 c) 100

2. Soit X la variable aléatoire dont la courbe de sa fonction est répartition est tracée ci-contre :
La probabilité de l'évènement [0,1] est :




   a) 0,75 b) 0,5 c) 0,25

3. L'urne $U_1$ contient trois jetons bleus et quatre jetons rouges. L'urne $U_2$ contient quatre jetons bleus et trois jetons rouges. On tire un jeton de $U_1$. Si ce jeton est bleu, sans le remettre, on tire un autre jeton de $U_1$, sinon on tire un jeton de $U_2$.
La probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur est :
   a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{12}{49}$ c) $\frac{19}{49}$

**Exercice 2:** (4 points)

Une entreprise fabrique un équipement. Le prix unitaire $y_i$, en dinars, de ce produit est en fonction du nombre $n_i$ d'unités produites. On a relevé les résultats suivants :

| $n_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1501 | 811 | 544 | 436 | 375 | 320 | 287 | 252 | 233 | 210 |

1. a) Représenter le nuage de points de coordonnées $(n_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour 100 dinars en ordonnées.
   b) Calculer les moyennes $\overline{n}$ et $\overline{y}$. Placer le point moyen G dans le repère précédent.
   c) Un ajustement affine parait-il justifié ?

2. On pose $x_i = \frac{1}{n_i}$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant où les valeurs $x_i$ seront arrondies à $10^{-2}$ près :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | | | | | | | | |
| $y_i$ | 1501 | 811 | 544 | 436 | 375 | 320 | 287 | 252 | 233 | 210 |

b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les résultats à $10^{-2}$ près).

c) En déduire l'expression de y en fonction de n.

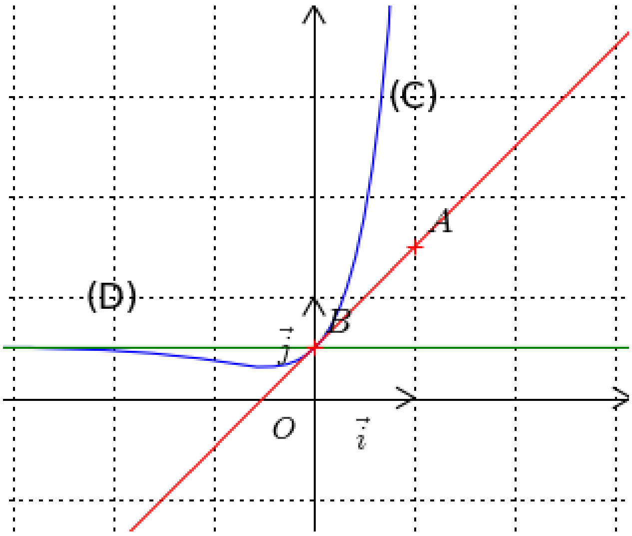
3. Lorsque le nombre d'unités produite est 12, déterminer une estimation du prix unitaire de ce produit.

**Exercice 3 :** ( 4 points)

Le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (C) est la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe (C) passe par les points $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ et $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- ✓ La droite (AB) est tangente à la courbe (C) en B.
- ✓ La droite (D) est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- ✓ La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.




1. Donner par lecture graphique :

Donner $f(0)$, $f'(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. On suppose que pour tout x réel , $f(x) = axe^{2x} + b$, où a et b sont deux réels .
   a) Calculer pour tout x réel, $f'(x)$.
   b) Déterminer les réels a et b .

3. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x} - 1$.

b) Montrer que $\int_{-1}^{0} (1 - f(x))dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left(e^{2x} - f'(x) + 1\right)dx$ .

c) En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie un plan limitée par la courbe (C), la droite (D) , la droite des ordonnées et la droite d'équation x = -1.

**Exercice 4** : ( 4 points)

Les valeurs des probabilités seront arrondies à $10^{-4}$ près. On considère la production de lampes pour vidéoprojecteurs. On admet que la variable aléatoire T qui, à toute lampe choisie au hasard dans la production, associe sa durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1. Le constructeur annonce que $p(T > 1000) = 0,607$. Vérifier qu' une valeur approchée de $\lambda$ est 0,0005.

2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit supérieure à 4000 heures ?

3. Déterminer, à une heure prés, le nombre d'heures t pour lequel $p(T \leq t) = 0,7$.

4. Sachant qu'une lampe a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité pour qu'elle fonctionne encore plus de 4000 heures ?

5. Sachant qu'une lampe a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité pour qu'elle tombe en panne avant 4000 heures ?

**Exercice 5 :** ( 5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,1)$, $B(1,0,0)$ , $C(-1,0,1)$ et $D(1,-1,0)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (P).
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

2. a) Calculer l'aire du triangle ABC.
   b) Calculer la distance du point D au plan (P)
   c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

3. Soit (S) l'ensemble des points M(x, y , z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + y - z - 1 = 0$.
   a) Montrer que la sphère (S) est de centre $I\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
   b) vérifier que (S) est la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) au point D.

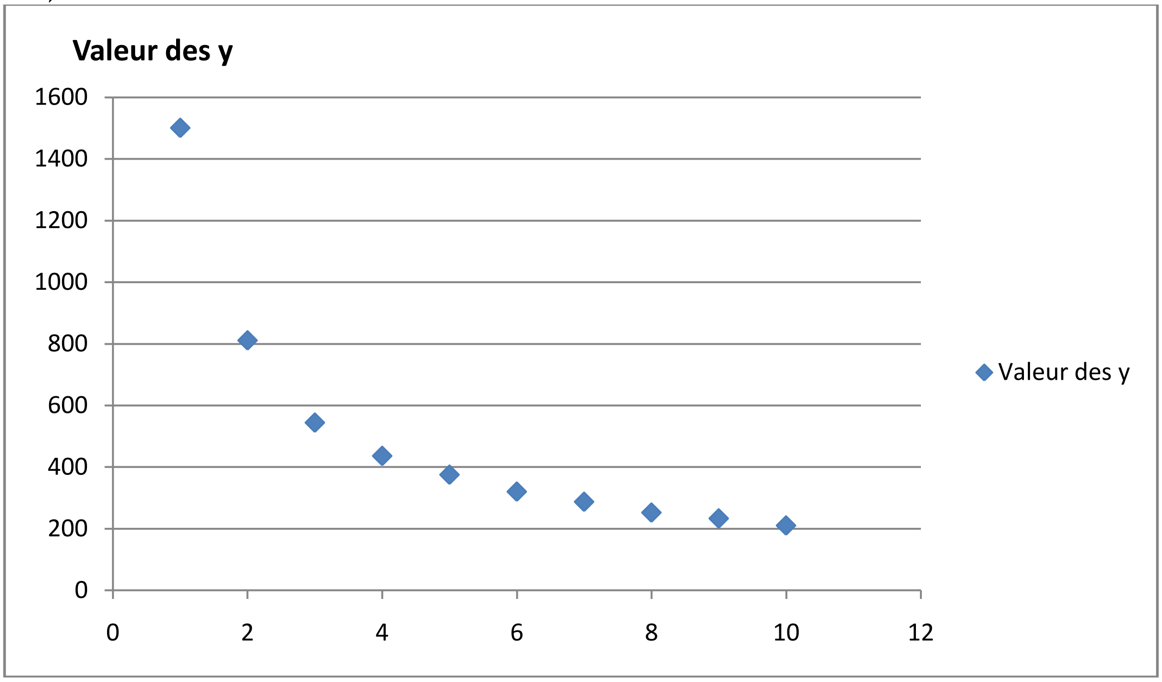
## Corrigé

Exercice 1 :

1. b) ; 2.c) ; 3. c)

Exercice 2 :

1.a)




b) $\bar{n} = \dfrac{1+2+\ldots+10}{10} = 5{,}5$ et $\bar{n} = \dfrac{1501+811+\ldots+10}{10} = 476{,}9$ donc G(5,5 ; 496,9).

c) Le nuage de points n'est pas allongé donc un ajustement affine de cette série n'est justifié.

2. a)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 0,5 | 0,33 | 0,25 | 0,2 | 0,17 | 0,14 | 0,13 | 0,11 | 0,1 |
| $y_i$ | 1501 | 811 | 544 | 436 | 375 | 320 | 287 | 252 | 233 | 210 |

b) Une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est :

y = 1431,14.x + 77,58.

c) y = $1431{,}14.\dfrac{1}{n} + 77{,}58$

pour n = 12 , y = $1431{,}14.\dfrac{1}{12} + 77{,}58 \approx 196{,}84$

D'où le prix unitaire de ce produit est 197.

Exercice 3 :

1. $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f'(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

2. a) pour tout x réel, $f'(x) = ae^{2x} + 2axe^{bx}$.

   b) On a f(0) = $\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$ , $f'(0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

3. a) On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = e^{2x} + x\left(2e^{2x}\right) = e^{2x} + 2xe^{2x}$.

Il en résulte que : pour tout x réel, $f'(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^{2x}-2\left(e^{2x}+\frac{1}{2}\right)=e^{2x}-1$

Donc la fonction f définie par $f(x)=xe^{2x}+\frac{1}{2}$ est une solution de (E).

b) On a pour tout x réel,

$$f'(x)-2f(x)=e^{2x}-1 \Leftrightarrow -2f(x)=e^{2x}-f'(x)+1 \Leftrightarrow -f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}-f'(x)+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x)=1-\frac{1}{2}\left(e^{2x}-f'(x)+1\right) \Leftrightarrow 1-f(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)-e^{2x}+1\right).$$

Ainsi , $\int_{-1}^{0}\left(1-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(e^{2x}-f'(x)+1\right)dx$ .

c) Par suite $\int_{-1}^{0}\left(1-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(e^{2x}-f'(x)+1\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-f(x)+x\right]_{-1}^{0}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-xe^{2x}-\frac{1}{2}+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{2x}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(e^{2x}-1\right)\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{4}\left(1-e^{-2}\right)$$

**Exercice 4** :

1. p(T > 1000) = $0,607 \Leftrightarrow e^{-1000\lambda}=0,607 \Leftrightarrow -1000\lambda=\ln(0,607) \Leftrightarrow \lambda=-\frac{\ln(0,607)}{1000}$.

   Or $-\frac{\ln(0,607)}{1000}\approx 0,000499$ donc une valeur approchée de $\lambda$ est 0,0005.

2. $p(X\geq 4000)=e^{-4000\lambda}=e^{-2}\approx 0,1353$.

3. $p(T\leq t)=0,7 \Leftrightarrow 1-e^{-0,0005t}=0,7 \Leftrightarrow e^{-0,0005t}=0,3 \Leftrightarrow -0,0005t=\ln(0,3) \Leftrightarrow t=-\frac{\ln(0,3)}{0,0005}$.

   Or $-\frac{\ln(0,3)}{0,0005}\approx 2407,946$ donc $t\approx 2408$ heures.

4. a) $p\left((X\geq 4000)\middle|(X\geq 2000)\right)=\frac{p\left((X\geq 4000)\cap(X\geq 2000)\right)}{p(X\geq 2000)}=\frac{p(X\geq 4000)}{p(X\geq 2000)}=\frac{e^{-4000\times 0,0005}}{e^{-2000\times 0,0005}}$

$$=e^{-2000\times 0,0005}=e^{-1}\approx 0,368.$$

b) $p\left((X\leq 4000)\middle|(X\geq 2000)\right)=\frac{p\left((X\leq 4000)\cap(X\geq 2000)\right)}{p(X\geq 2000)}=\frac{p(2000\leq X\leq 4000)}{p(X\geq 2000)}$

$$=\frac{e^{-2000\times 0,0005}-e^{-4000\times 0,0005}}{e^{-2000\times 0,0005}}=1-e^{-1}\approx 0,632$$

Exercice 5 :

1. a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq\vec{0}$ donc les points A, B et C ne sont alignés et par suite déterminent un plan.

c) $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) donc P : x + 2y + 2z + d = 0 , où d $\in\mathbb{R}$.

Or $B(1,0,0)\in(P)$ donne 1 + d = 0 d'où d = -1. Ainsi , $P: x+2y+2z-1=0$.

2. a) L'aire du triangle ABD est $A(ABC) = \dfrac{\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|}{2} = \dfrac{\sqrt{1+4+4}}{2} = \dfrac{3}{2}$.

b) $d(D,P) = \dfrac{|1-2+0-1|}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Il en résulte : le volume du tétraèdre ABCD est $V(ABCD) = \dfrac{A(ABC)\times d(D,P)}{3} = \dfrac{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$ .

3. a) $x^2+y^2+z^2+y-z-1=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-1=0$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

Donc (S) est la sphère de centre $I\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b) $IA=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ , $IB=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ , $IC=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et

$IA=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ . Donc la sphère passe par les points A, B, C et D d'où (S) est la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD.

c) Soit (Q) le plan tangent à la sphère (S) au point D, le vecteur $\vec{DI}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (Q) d'où $Q: -x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z+d'=0$ où d' est un réel.

$D\in(Q)\Leftrightarrow -1-\dfrac{1}{2}+0+d'=0\Leftrightarrow d'=\dfrac{3}{2}$.

Il en suit : $Q: -x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}=0$ ou encore $Q: -2x+y+z+3=0$.