

❖❖❖
DEVOIR DE SYNTHESE N° 1
 ❖❖❖

Mr ABIDI Farid

EPREUVE MATHÉMATIQUES

Durée 3 h

Date : 08-12-2009

Exercice 1 : (3 points)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une et une seulement est exacte.
 Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
 Aucune justification n'est demandée.

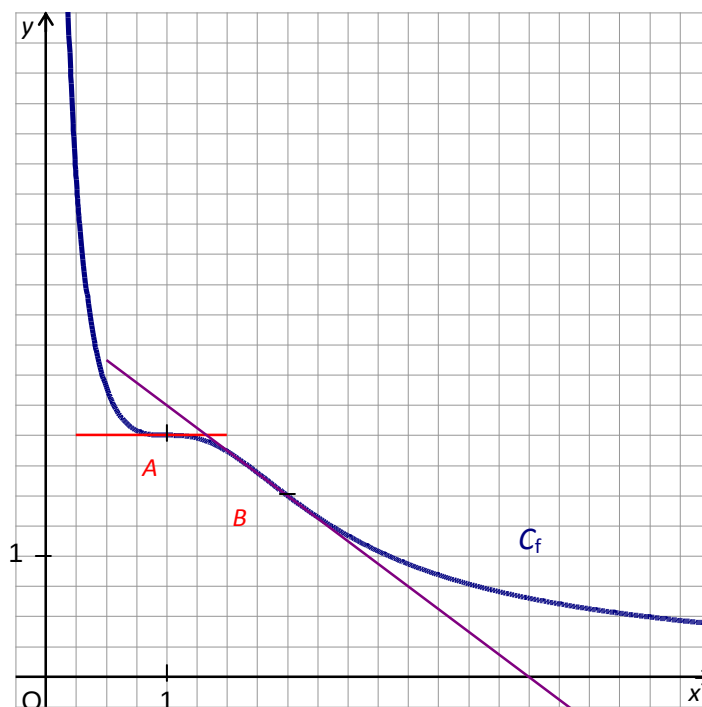
1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
 - a) La fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$ admet un extremum local sur $]0, 1[$;
 - b) La fonction f est croissante sur $[0, 1]$;
 - c) Pour tout c appartenant à $]0, 1[$, on a : $f'(c) \neq 1$
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
 - a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
 - b) (u_{2n}) est une suite croissante ;
 - c) les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes .
3. Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On sait que :

Les droites d'équation respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe C_f ;
 la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1 ;
 la tangente à la courbe C_f au point $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$ passe par le point de coordonnées $(4; 0)$

- a) La courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} admet deux points d'inflexion.

- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0$;

- c) f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$
 et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$



Exercice 2 : (6 points)

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 1$.
 - Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 - Etablir que $0 < \alpha < \frac{1}{5}$.
- Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'équation $(E_n): x^3 + 5x = n$.
 - Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation (E_n) admet une et une seule solution α_n dans $\mathbb{R}$.
 - Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
 - Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha \leq \alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$.
 - Justifier que pour tout $n \geq 1$, $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right) = 1$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.
- On pose $(F_0): 5x = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation $(F_n): x^n + 5x = 1$.
 - Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation (F_n) admet une et une seule solution β_n dans $[0, +\infty[$.
 - Calculer β_0 , β_1 et β_2 . Démontrer que pour tout entier n , $0 < \beta_n \leq \frac{1}{5}$.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n)^n$.
 - En utilisant l'équation satisfaite par β_n , déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O le milieu de $[AC]$.

On désigne par I le milieu de $[OB]$ et par D le symétrique de O par rapport à (BC) . Soit J le point d'intersection des droites (AD) et (BC) .

- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.
 - Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
 - Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de $[BD]$ et en déduire que les points O , J et K sont alignés.
- On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.
 - Déterminer $g(B)$ et $g(C)$.
 - En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$.

3. On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[BD]$.

Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{BO}$.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$.

5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1 = 0$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ) .

On mettra les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle où z_1 est celle dont la partie imaginaire est négative.

b) On désigne par M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et $z_3 = i$.

Déterminer la valeur de θ pour laquelle $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.

c) Faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Dans tout ce qui suit, on prend : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $(-\sqrt{3} + i)$.

Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_1)$ puis placer le point M_4 .

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Calculer l'affixe z_5 du point $M_5 = r(M_1)$ puis placer le point M_5 .

4. On désigne par z_6 l'affixe du point M_6 le symétrique de M_3 par rapport à O .

Montrer que les racines sixièmes de (-1) sont z_k , avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Ecrire le polynôme $z^6 + 1$ sous forme de produit de trois polynômes de second degré à coefficients réels.

Solution

Exercice 1 :

1. a) ; 2.c) ; 3. b)

Exercice 2 :

1. a) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\liminf_{-\infty}, \limsup_{+\infty}[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- b) L'équation $x^3 + 5x = 1$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.
Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que 0 admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$ alors l'équation $x^3 + 5x = 1$ admet une solution unique réelle α .
- c) $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125} + 1 - 1 = \frac{1}{125}$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{5}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'équation $(E_n): x^3 + 5x = n$.
 - a) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $g(x) = n$ ou encore l'équation (E_n) admet une et une seule solution α_n dans $\mathbb{R}$.
 - b) On a : $g(\alpha_n) = n$ et $g(\alpha_{n+1}) = n+1$.
Comme $n < n+1$ alors $g(\alpha_n) < g(\alpha_{n+1})$ puis que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - c) On a $g(\alpha) = 0$, pour tout $n \geq 1$, $g(\alpha_n) = n$ et $g(\sqrt[3]{n}) = n + 5\sqrt[3]{n} + 1 \geq 1$.
Comme g est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $n \geq 1$, $\alpha \leq \alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$.
On a pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha}{n} \leq \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{n}$. D'autre part :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0.$$
 - d) Pour tout $n \geq 1$, $g(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n^3 + 5\alpha_n = n \Leftrightarrow \frac{\alpha_n^3}{n} + 5\frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$.
Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, alors on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.
3. On pose $(F_0): 5x = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation $(F_n): x^n + 5x = 1$.
 - a) L'équation $(F_0): 5x = 1$ admet une unique solution.
Pour tout entier naturel $n > 0$, on introduit la fonction $f_n(x) = x^n + 5x - 1$, $x \geq 0$.
 f_n est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 5 > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Il en résulte que l'équation (F_n) admet une et une seule solution β_n dans $[0, +\infty[$.

1. a) O est milieu de [AC] donc $AO = OC$. Comme $D = S_{(BC)}(O)$ alors $OC = DC$.

Il en résulte que $AO = CD$ et $AO \neq 0$ et par suite il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.

b) Cherchons l'angle du déplacement f :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi + 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})[2\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi + 2\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Le centre de f est le point d'intersection des médiatrices des segments [AC] et [OD] qui n'est autre que le point B.

Ainsi, f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Soit $K = f(I)$. I est le milieu de [OB] donc K est le milieu de $f([OB]) = [DB]$.

Le triangle BDO est isocèle en B, (DI) est la médiane issue de D et (BC) est la médiane issue de B. Comme J est le point d'intersection des médianes (DI) et (BC) alors J est le centre de gravité de BDO donc J appartient à la médiane (OK) issue de K.

Ainsi les points O, J et K sont alignés.

2. On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

$$a) g(B) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}(B) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)}(B) = S_{(BO)}(B) = B$$

$$\text{et } g(C) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}(C) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)}(A) = S_{(BO)}(A) = C.$$

b) Comme $S_{(BO)} \circ S_{(AB)}$ est un déplacement et f^{-1} est un déplacement alors g est un déplacement. D'autre part, g fixe les points B et C donc g est l'identité du plan. On en déduit que $S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1} = \text{Id}_P \Leftrightarrow S_{(AB)} \circ f^{-1} = S_{(BO)} \Leftrightarrow f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$.

$$\begin{aligned} 3. h &= S_{(OD)} \circ f^{-1} = S_{(OD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BO)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(BO)} = t_{\overrightarrow{BO+OC}} \circ S_{(BO)} = t_{\overrightarrow{BO}} \circ t_{\overrightarrow{OC}} \circ S_{(BO)} \\ t_{\overrightarrow{BO}} \circ t_{\overrightarrow{OC}} \circ S_{(BO)} &= t_{\overrightarrow{BO}} \circ S_{\Delta} \circ S_{(BO)} = t_{\overrightarrow{BO}} \circ S_{\Delta}. \end{aligned}$$

Par suite, g est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

$$\begin{aligned} 4. h(M) &= f^{-1}(M) \Leftrightarrow S_{(OD)} \circ f^{-1}(M) = f^{-1}(M) \Leftrightarrow S_{(OD)}[f^{-1}(M)] = f^{-1}(M) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(M) \in (OD) \Leftrightarrow M \in f^{-1}((OD)) \end{aligned}$$

Comme f^{-1} est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors $f^{-1}((OD))$ est la droite perpendiculaire à (OD) passant par $f^{-1}(D) = O$. Donc l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$ est la médiatrice de [AB].

4. $S_{(BO)} \circ h$ est la composée de deux antidéplacements donc $S_{(BO)} \circ h$ est un déplacement. On a : $S_{(BO)} \circ h(D) = S_{(BO)}(O) = O$ et $S_{(BO)} \circ h(B) = S_{(BO)}(C) = A$

Et comme $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA}$ alors $S_{(BO)} \circ h = t_{\overrightarrow{BA}}$.

Exercice 4:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1 = 0$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Le calcul du discriminant donne :

$$\Delta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 4 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 4e^{i\theta}e^{-i\theta} = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2.$$

Les racines de l'équation sont : $z_1 = e^{-i\theta}$ et $z_2 = e^{i\theta}$. La partie imaginaire de

z_1 est $\sin \theta < 0$ car $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

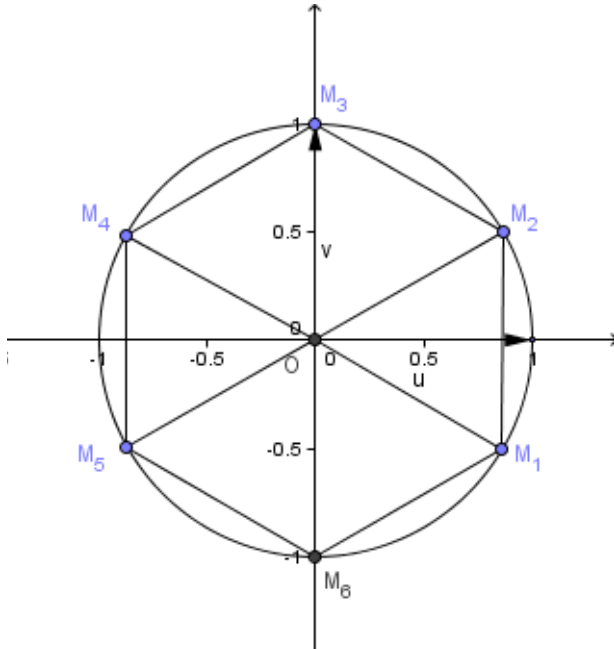
N.B : On peut aussi remarquer que l'équation (E_θ) s'écrit sous la forme

$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \times z_2 = 0$. En effet, si l'on prend : $z_1 = e^{-i\theta}$ et $z_2 = e^{i\theta}$, on obtient :
 $z_1 \times z_2 = e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = 1$.

b) $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow 2i\sin\theta = i \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$.

Comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) Faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.



Dans tout ce qui suit, on prend $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $(-\sqrt{3} + i)$.

$$M_4 = t(M_1) \Leftrightarrow z_4 = z_1 + (-\sqrt{3} + i) \Leftrightarrow z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

$$M_5 = r(M_1) \Leftrightarrow z_5 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 \Leftrightarrow z_5 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_5 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

4. L'affixe du point M_6 le symétrique de M_3 par rapport à O est $z_6 = -i$.

Les racines sixièmes de (-1) sont les solutions de l'équation $z^6 = -1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi+2n\pi)}$ c'est-à-

dire encore les nombres complexes qui s'écrivent sous la forme $e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)}$ avec $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il en résulte :

$$e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{0\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}} = z_2 ; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = z_3 ; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = z_4 ;$$

$$e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = z_5 ; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i = z_6 \text{ et } e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = z_1.$$

Ainsi, les racines sixièmes de (-1) sont z_k avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$5. z^6 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$$

$$= \left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right) (z - i) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \left(z - e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right) (z + i)$$

Or $(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1 = z^2 - 2\cos\theta z + 1$; il en résulte que :

$$z^6 + 1 = \left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right) (z - i) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \left(z - e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right) (z + i)$$

$$= \left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{6}z + 1\right) (z^2 + 1) \left(z^2 - 2\cos\frac{5\pi}{6}z + 1\right)$$

$$= (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$$