Exercice 1 :

a. Vrai .

En effet :

Pour tout entier x , $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1)$.

Or le produit de deux entiers consécutifs x et (x + 1) est pair, il en résulte que $x^3 - x$ est pair .

D'où il existe un entier p tel que $x^3 - x = 2p$ ou encore $x^3 \equiv x \pmod 2$.

Ou encore :

Le reste de x modulo 2	0	1
Le reste de x^3 modulo 2	0	1
Le reste de $x^3 - x$ modulo 2	0	0

b. Faux .

Contre-exemple :

prenons x = 2 , on a : $x \equiv 2 \pmod{14}$ mais on n'a pas $x \equiv 1 \pmod 7$

c. Vrai.

En effet :

Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $4x \equiv 0 \pmod 5$ d'où il existe un entier k tel que $4x = 5k$.

Comme $4 \wedge 5 = 1$ et 5 divise 4x alors 5 divise x. Ainsi , $x \equiv 0 \pmod 5$.

d. Faux .

Contre-exemple :

Prenons x = -1 et y = 5 , on a : $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ et pourtant $8x - 5y = -8 - 25 = -33 \neq 7$.

Exercice 2 :

I-1. On a pour tout x réel, g(x) = e^{-x} donc g'(x) = $-e^{-x}$ d'où g(0) = 1 e t g'(0) = -1 . Ainsi, une équation de la tangente à la courbe (Γ) de g au point d'abscisse 0 est : y = - x + 1.

2. a) si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$.

Posons , pour tout $x \geq 0$, h(x) = $e^{-x} + x - 1$.

h est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, h'(x) = $-e^{-x} + 1 \geq 0$. Donc h est croissante sur $[0,+\infty[$. Il en résulte : $x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq -x + 1$.

Ainsi , pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$

Ou encore :

On a pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \leq 1$ donc pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x dt \Leftrightarrow \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq x \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \leq x \Leftrightarrow 1 - x \leq e^{-x}.$$

b) On a pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t} \leq 1$ donc pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x dt \Leftrightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq x \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x.$$

Ou encore :

pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \geq -x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 \geq -x \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \leq x$.

On pose pour tout $x \geq 0$, k(x) = $e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x - 1$.

k est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, k'(x) = $-e^{-x} - x + 1 \leq 0$. Donc k est croissante sur $[0,+\infty[$.

Il en résulte : $x \geq 0 \Rightarrow k(x) \leq k(0) \Rightarrow e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x - 1 \leq 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \geq 1 - e^{-x}$.

D'où le résultat.

II-1.a) $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. donc f est continue à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on pour tout x > 0, $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0$

x	0		+∞
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	1

2. a) f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : pour tout x > 0, $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

d'où $f''(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{-2x+1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$. $f''(x)$ est du signe de (-2x + 1) sur $]0,+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{2}$		+∞
$f''(x)$	‖	+	0	-	

Comme $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ alors le point $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$) de f.

b) On a : $f'\left(\frac{1}{2}\right)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$ donc une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point I est

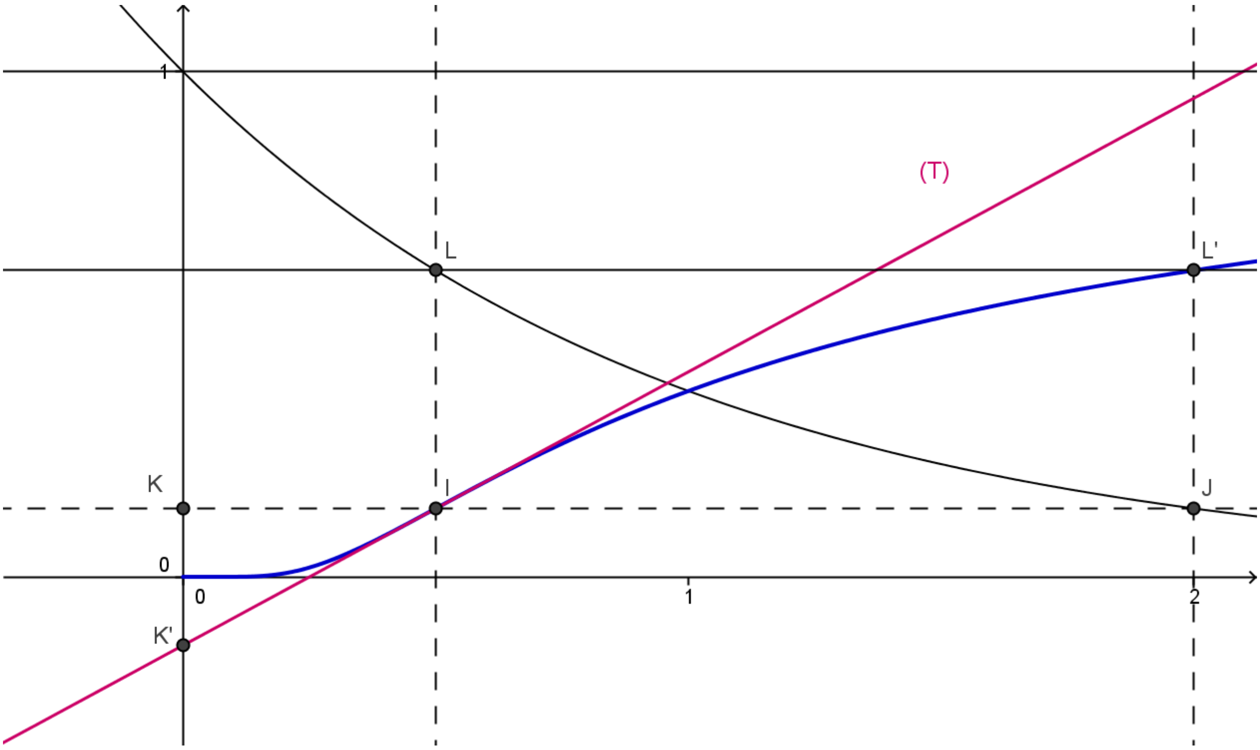
$y=\frac{4}{e^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow y=\frac{4}{e^2}x-\frac{1}{e^2}$.

3. a) Soit J le point de (Γ) d'abscisse 2, la parallèle à l'axe des abscisses passant par J coupe ($\mathscr{C}$) en I.

b) La Tangente (T) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4},0\right)$

Ou encore : la droite (IJ) coupe l'axe des ordonnées en K , Soit K' le symétrique de K par rapport à l'origine O , la tangente (T) passe par le point K'.

c)



4. a) l'aire A_k donnée par $A_k = \int_k^{k+1}(1-f(x))dx = \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx$.

Or pour tout x > 0, $\frac{1}{x}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} \le 1-e^{-\frac{1}{x}} \le \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} \le 1-e^{-\frac{1}{x}} \le \frac{1}{x}$

D'où : $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx \le \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \left[\ln x+\frac{1}{2}.\frac{1}{x}\right]_k^{k+1} \le A_k \le [\ln x]_k^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \ln(k+1)+\frac{1}{2}.\frac{1}{k+1}-\ln k-\frac{1}{2}.\frac{1}{k} \le A_k \le \ln(k+1)-\ln k \Leftrightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \le A_k \le \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

b) On a : $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k} = \lim\limits_{k\to+\infty} 1+\frac{1}{k} = 1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln 1 = 0$

et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = 0$.

5. a) Pour tout n ≥ 1, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$.

S_n est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives x = 1 , x = n+1 et y = 1.

b) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Comme
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Et $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Alors $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) On a , pour tout n ≥ 1, $S_n \geq \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

D'autre part, pour tout n ≥ 2, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}\right] \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}\right] = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 3 :

1. BEG est un triangle isocèle , rectangle et direct en G donc $BG = \frac{\sqrt{2}}{2}BE$ et $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

   donc f(E) = G.

   BFA est un triangle isocèle , rectangle et direct en A donc $BA = \frac{\sqrt{2}}{2}BF$ et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

   donc f(F) = A.

2. a) $\frac{FB}{AF} = \frac{AF\sqrt{2}}{AF} = \sqrt{2}$ donc le rapport de g est $\sqrt{2}$.

   $$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}\right) + \pi[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB}\right) \equiv \frac{\pi}{4} - \pi[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

   Donc l'angle de S est $-\frac{3\pi}{4}$.

   b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et d'angle $2 \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2}$ d'où l'angle de $g \circ g$ est $\frac{\pi}{2}$.

   c) $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{AI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AF}{AF} = \frac{1}{2}$.

   Le triangle ABG est rectangle en G donc $\frac{GA}{GB} = \tan\left(\widehat{ABG}\right) = \tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$ donc GB= 2 GA.

   d) On a : $g \circ g(A) = g(g(A)) = g(F) = B$, GB = 2 GA et $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc G est le centre de $g \circ g$ d'où G est de le centre de g.

3. a) $r = g \circ f$ est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angles respectifs $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ donc r est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ d'où r est une rotation de d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Or $r(F) = g \circ f(F) = g(A) = F$ alors r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $r(E) = g \circ f(E) = g(G) = G$. D'où EFG est un triangle isocèle, rectangle en F et direct.

On a d'une part EGB est un triangle isocèle, rectangle en G et direct, et d'autre part H le milieu de [EB] donc EGH est un triangle isocèle, rectangle en H et direct.

Il en résulte : EFGH est un carré.

Exercice 4:

1) a) z est une nombre complexe différent de -1, 0 et 1 .

Le triangle MNP est rectangle en P $\Leftrightarrow \frac{Z_{\overline{PM}}}{Z_{\overline{PN}}}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \frac{z-z^3}{z^2-z^3} = \frac{z(1-z)(1+z)}{z^2(1-z)} = \frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) On pose z = x+ iy où x et y sont réel tels que (x, y) différent de (-1, 0) , (0, 0) et (1, 0).

$$\frac{1+z}{z} = \frac{(1+x)+iy}{x+iy} = \frac{[(1+x)+iy](x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x(1+x)+ixy-i(1+x)y+y^2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2+x+i(xy-(1+x)y)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c) Le triangle MNP est rectangle en P $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$ est imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x=0 \text{ et } x^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } (x,y) \neq (0,0)$$

Remarquons que les coordonnées (1, 0) du point A vérifie cette équation et que le milieu de [OA] est le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Donc l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P est le cercle (Γ) de centre le point I $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A.

2) a) $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv \arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv \arg(z)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv \arg(z)[2\pi]$

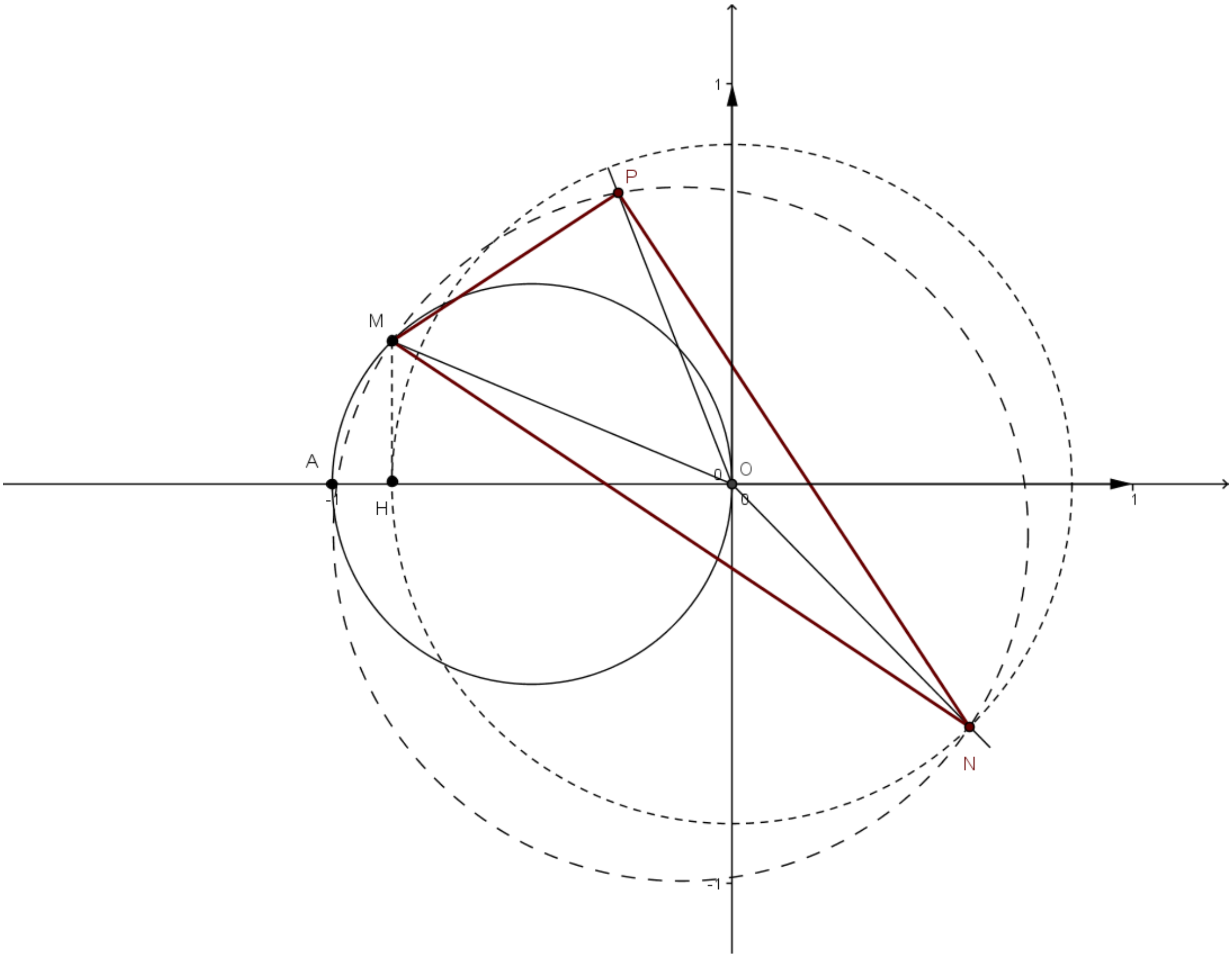
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

b) Posons z = x + iy où x et y sont deux réels tel que (x, y) ≠ (0,0) , (x, y)≠ (1,0) et (x, y)≠ (-1,0) .

Comme M appartient à (Γ) alors $x^2+y^2+x=0 \Leftrightarrow -x=x^2+y^2 \Leftrightarrow OH=OM^2$.

c) $ON=\left|z^2\right|=\left|z\right|^2=OM^2=OH$ donc N appartient au cercle de centre O et de rayon OH tel que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

Le triangle MNP est rectangle en P donc Appartient au cercle de diamètre [MN] tel que $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.


1
P
M
A
-1
H
0
O
0
1
N
-1