

Exercice 1 :

1) (E) : $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = 0$

a) $(i)^3 + i(i)^2 - 2i + 4i = -i - i + 2i = 0$ donc i est une solution de (E).

b) i est une solution de (E) donc $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c)$

Par identification : $b - i = i$ et $-ic = 4i$ d'où $b = 2i$ et $c = -4$

$$(E) \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + 2iz - 4) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 + 2iz - 4 = 0$$

2) a) (E) $\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$

$$z^2 + 2iz - 4 = 0, \Delta = (2i)^2 - 4 \times (-4) = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

Les solutions de cette équation sont : $z' = \frac{-2i + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z' = \frac{-2i - 2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} - i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i\}$$

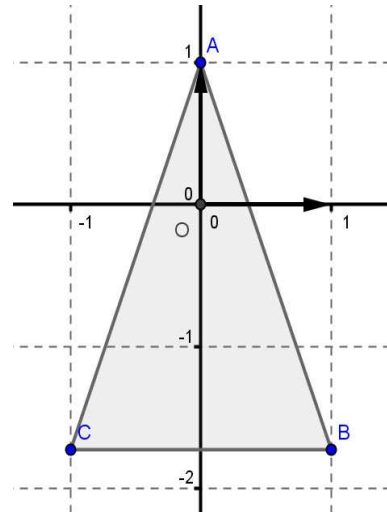
b) *HORS PROGRAMMES et hors bareme .*

3) a)

b) $AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} - i - i| = |\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

et $AC = |z_C - z_A| = |-\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

donc $AB = AC$ ainsi le triangle ABC est isocèle en A

**Exercice 2**

- 1) x : désigne le prix d'achat du scanner .
 y : désigne le prix d'achat d'un ordinateur.
 z : désigne le prix d'achat d'une imprimante.

Le premier lycée a acheté : 1 scanner, 2 ordinateurs et 3 imprimantes à 3200D ce traduit par l'équation :
 $x + 2y + 3z = 3200$

Le second lycée a acheté : 4 scanners, 2 ordinateurs et 5 imprimantes à 3200D ce traduit par l'équation :
 $4x + 2y + 5z = 4600$

Le troisième lycée a acheté : 1 scanner, 2 ordinateurs et 3 imprimantes à 2700D ce traduit par l'équation :
 $x + 2y + 3z = 2700$

Ainsi (x, y, z) est la solution du système : (S)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3200 \\ 4x + 2y + 5y = 4600 \\ 3x + y + 3z = 2700 \end{cases}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

a) $\det A = 6 - 5 - 4 \times (6 - 3) + 3 \times (10 - 6) = 1 - 12 + 12 = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où B est l'inverse de A.

3) (S)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3200 \\ 4x + 2y + 5y = 4600 \\ 3x + y + 3z = 2700 \end{cases} \Leftrightarrow AX = M \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

Donc la solution de (S) est :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \times M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 900 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{(200, 900, 400)\}$

Exercice 3 :

1) (E) : $8x + 5y = 100$

a) (x, y) est une solution de (E) alors $8x + 5y = 100 \Leftrightarrow 8x = 100 - 5y = 5(20 - y)$ donc 5 divise $8x$ or $8 \wedge 5 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss 5 divise x d'où x est un multiple de 5.

b) x est un multiple de 5 donc $x = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ on remplace dans (E) on obtient $y = 20 - 8k$, $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le couple $(5k, 20 - 8k)$ vérifie l'équation (E)

D'où $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(5k, 20 - 8k), k \in \mathbb{Z}\}$

2) On désigne par x le nombre des lycéens et y celui des collégiens on obtient : $8x + 5y = 100$ avec

$x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc
$$\begin{cases} 5k \geq 0 \\ 20 - 8k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{20}{8} \end{cases} \text{ donc } 0 \leq k \leq 2$$

D'après 1)
$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 20 - 8k \\ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
$f(x)$	0	$\frac{e}{2}$	$-\infty$

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$

2)
$$\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0$$

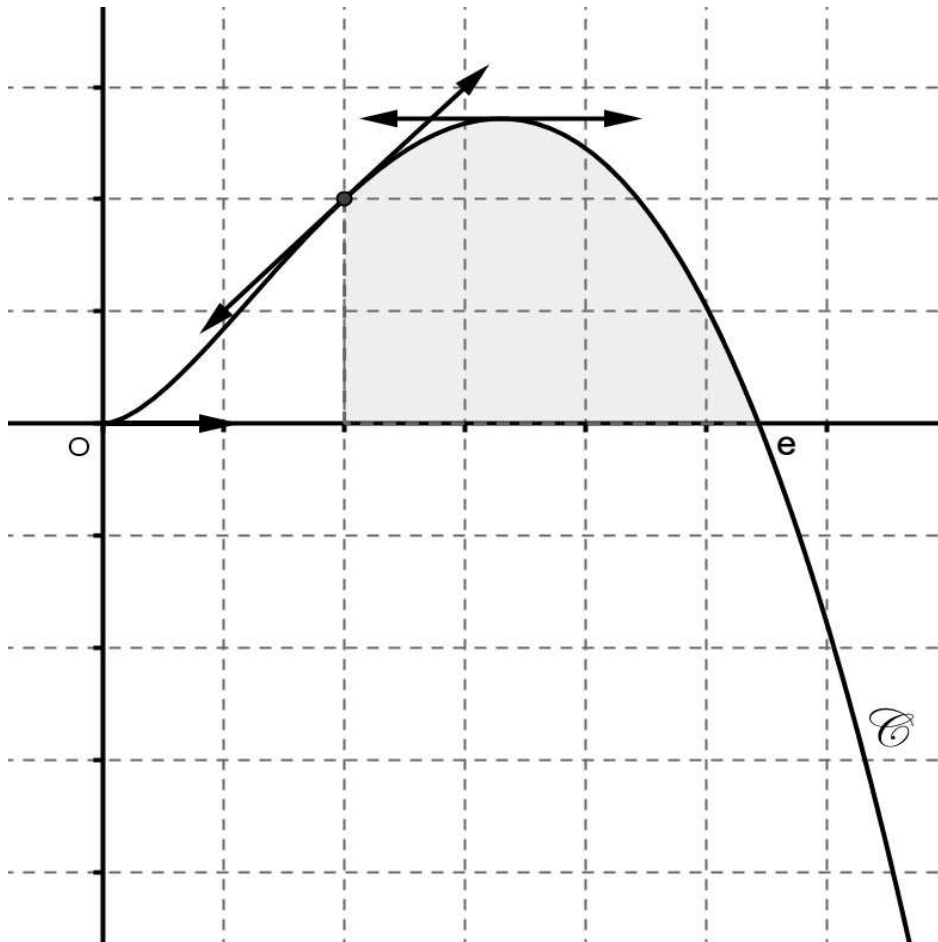
Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. La courbe C de f admet une demi-tangente horizontale à l'origine.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \text{ donc } C \text{ admet une branche parabolique verticale au voisinage de } +\infty$$

$$c) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e$$

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et l'axe des abscisses $(0,0)$ et $(e,0)$.

d)



$$3) \mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x^2(1 - \ln x) dx. \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = 1 - \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A} = \int_1^e x^2(1 - \ln x) dx = \left[\frac{x^3}{3}(1 - \ln x) \right]_1^e + \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = -\frac{1}{3} + \frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{e^3 - 4}{9} \text{ ua}$$