Exercice 1 :

1. Vrai .

En effet :

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos^2 t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$ donc la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0, $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x} \geq 0$.

2. Faux .

Contre-exemple :

On a $f(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{\cos^2 t}{t} dx = 0$ et f est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$ donc :

$\dfrac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(1) \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 0$

3. Vrai.

Pour tout $t \geq 1$, $\cos^2 t \leq 1 \Rightarrow \dfrac{\cos^2 t}{t} \leq \dfrac{1}{t}$ donc pour tout $x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow f(x) \leq \ln x$.

Prenons x = 2 : $f(2) \leq \ln 2$

Exercice 2 :

A-1. Soit $f_3(x) = 3\ln x - x$.

$$\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(3\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$$

f_3 et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0, $f_3'(x) = \dfrac{3}{x} - 1 = \dfrac{3-x}{x}$.

$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	‖ $-\infty$	↗	$3\ln 3 - 3$	↘	$-\infty$

2. On a :

- ✓ f_3 est continue et strictement croissante sur [1, 3]
- ✓ $f_3(1) = -1$ et $f_3(3) = 3\ln 3 - 3 \approx 0,3$ donc $f_3(3) > 0$

Donc l'équation $f_3(x) = 0$ admet une unique solution u_3 dans]1, 3[.

De même :

- ✓ f_3 est continue et strictement croissante sur $[3, +\infty[$
- ✓ $f_3([3, +\infty[) =]-\infty, 3\ln 3 - 3]$
- ✓ $0 \in]-\infty, 3\ln 3 - 3]$

Donc l'équation $f_3(x) = 0$ admet une unique solution v_3 dans $[3, +\infty[$.

3. a) On a :

- ✓ f_p est continue et strictement croissante sur [1, p]
- ✓ $f_p(1) = -p < 0$ et $f_p(p) = p\ln p - p = p(\ln p - 1)$

  Comme $p > 3$ alors $\ln p > 1$ d'où $f_p(p) > 0$

Donc l'équation $f_p(x) = 0$ admet une unique solution u_p dans]1, p[.

b) On a :

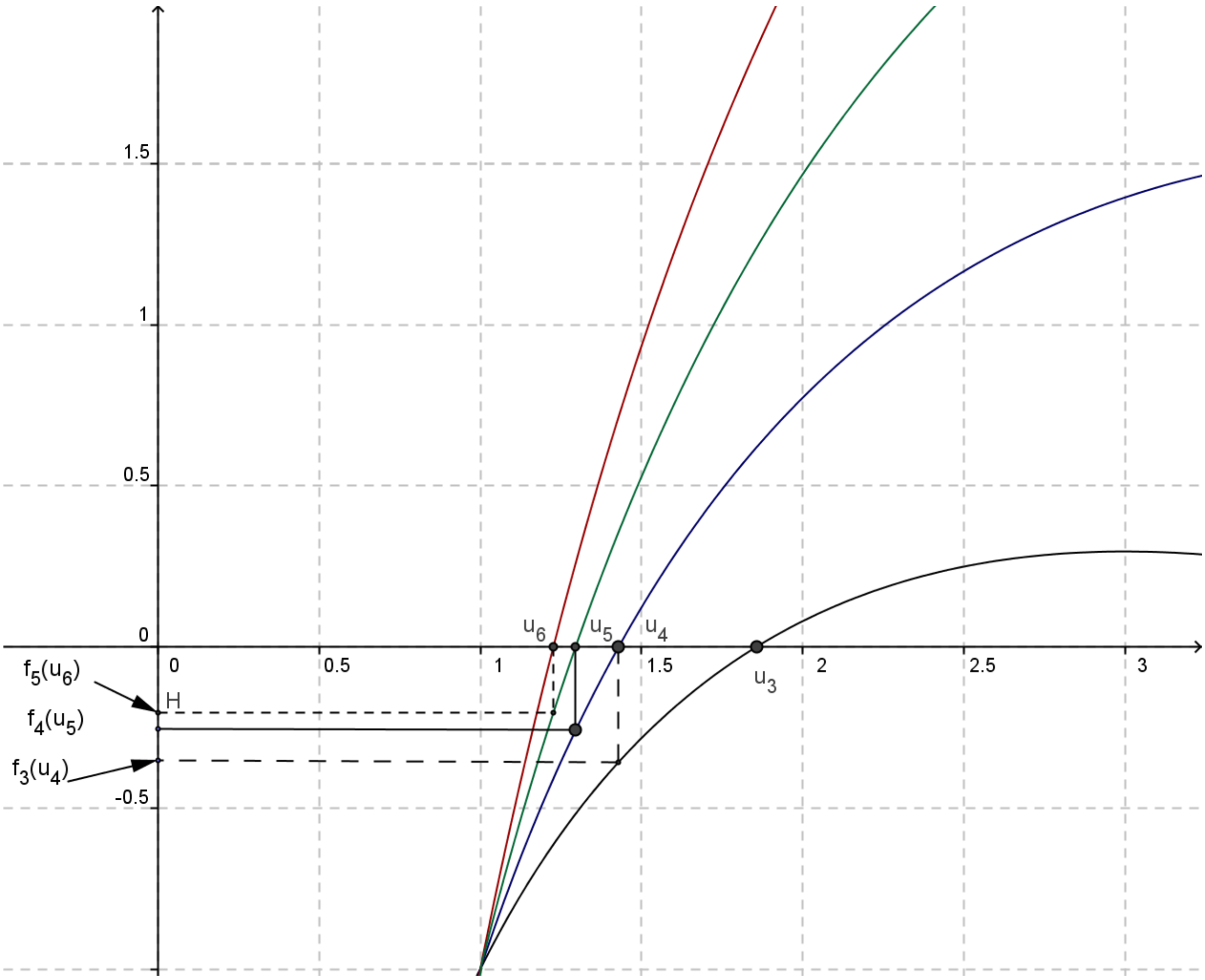
- ✓ f_p est continue et strictement croissante sur $[p, +\infty[$
- ✓ $f_p([p, +\infty[) =]-\infty, p\ln p - p]$
- ✓ $0 \in]-\infty, p\ln p - p]$

Donc l'équation $f_p(x) = 0$ admet une unique solution v_p dans $[3,+\infty[$.

D'où pour tout $p > 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

B- 1. Pour tout $p > 3$, $v_p > p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} p = +\infty$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = +\infty$.

2. a) et b) voir figure ci- jointe.



3. a) Pour tout $p \geq 3$, $f_{p+1}\left(u_{p+1}\right) = 0 \Leftrightarrow (p+1)\ln\left(u_{p+1}\right) - u_{p+1} = 0 \Leftrightarrow p\ln\left(u_{p+1}\right) - u_{p+1} + \ln\left(u_{p+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow p\ln\left(u_{p+1}\right) - u_{p+1} = -\ln\left(u_{p+1}\right) \Leftrightarrow f_p\left(u_{p+1}\right) = -\ln\left(u_{p+1}\right)$.

Or $u_{p+1} > 1$ alors $\ln\left(u_{p+1}\right) > 0$. Par suite : $f_p\left(u_{p+1}\right) = -\ln\left(u_{p+1}\right) < 0$.

b) Pour tout $p \geq 3$, $f_p\left(u_{p+1}\right) < 0 \Leftrightarrow f_p\left(u_{p+1}\right) < f_p\left(u_p\right)$.

D'autre part ≥ 3, $f_{p+1}(1) = -1$ et $f_{p+1}(p) = (p+1)\ln p - p = p(\ln p - 1) + \ln p > 0$ donc $u_{p+1} \in]1, p[$.

Comme f_p est continue et strictement croissante sur]1, p[alors f_p admet une bijection réciproque f_p^{-1} strictement croissante sur]-1 , p(lnp) –p[, ainsi :

$$f_p\left(u_{p+1}\right)<f_p\left(u_p\right)\Rightarrow f_p^{-1}\left(f_p\left(u_{p+1}\right)\right)<f_p^{-1}\left(f_p\left(u_p\right)\right)\Rightarrow u_{p+1}<u_p.$$

Donc, la suite $\left(u_p\right)$ est décroissante et comme $\left(u_p\right)$ est minorée par 1 alors $\left(u_p\right)$ et convergente.

c) Pour tout $p\geq 3$, $f_p\left(u_p\right)=0\Leftrightarrow p\ln\left(u_p\right)-u_p=0\Leftrightarrow p\ln\left(u_p\right)=u_p\Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(u_p\right)}{u_p}=\dfrac{1}{p}$.

Soit $\ell=\lim\limits_{p\to+\infty}u_p$, comme $u_p>1$ alors $\ell\geq 1$

Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est continue en ℓ alors

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\ln\left(u_p\right)}{u_p}=\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\Leftrightarrow\frac{\ln\ell}{\ell}=0\Leftrightarrow\ln\ell=0\Leftrightarrow\ell=1.$$

Ainsi , $\lim\limits_{p\to+\infty}u_p=1$.

Exercice 3 :

1. a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-4\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) Soit $\vec{n}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   D'où (ABC) : 2x –y + z + d = 0 où d est un réel.

   Comme A(1, 3, 2) est un point du plan (ABC) alors 2 -3 + 2 + d = 0 d'où d = -1.

   Ainsi , (ABC) : 2x –y + z -1 = 0.

2. a) $x^2+y^2+z^2-6x-2z-4=0\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2+(z-1)^2-9-1-4=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14$$

Donc (S) est la sphère de centre I(3, 0, 1) et de rayon $R = \sqrt{14}$.

b) la distance du point I au plan (ABC) est : d(I, (ABC)) = $\frac{|6-0+1-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R$

Donc (ABC) coupe (S) suivant un cercle (Γ).

Le rayon du cercle (Γ) est : r = $\sqrt{R^2 - d(I,(ABC))^2} = \sqrt{14-6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

A(1,3,2) et $(1-3)^2 + 3^2 + (2-1)^2 = 4+9+1 = 14$ donc $A \in (S)$

B(1,-1,-2) et $(1-3)^2 + (-1)^2 + (-2-1)^2 = 4+1+9 = 14$ donc $B \in (S)$

AB = $\sqrt{0+16+16} = 4\sqrt{2} = 2r$

Donc [AB] est un diamètre de (S).

c) On a :[AB] est un diamètre du cercle (Γ), $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ d'où (AC) est tangente au cercle (Γ) en A.

3. a) Le rayon de la sphère S' = h(S) est R'= 3 R = $3\sqrt{14}$

Le centre de (S') est le point J=h(I) .Posons J(x', y' , z') , $\overrightarrow{CJ} = 3.\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2 = 3(3-2) \\ y'-4 = 3(0-4) \\ z'-1 = 3(1-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = -8 \\ z' = 1 \end{cases}$

D'où J(5, -8 , 1).

b) le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) donc h((ABC)) = (ABC) coupe h(S) = S' suivant un cercle h(Γ)= Γ'.

c) (AC) est tangente à (Γ) donc h((AC))= (AC) est tangente à (Γ ') au point E = h(A).

Posons E(x', y' , z') , $\overrightarrow{CE} = 3.\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2 = 3(1-2) \\ y'-4 = 3(3-4) \\ z'-1 = 3(2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 1 \\ z' = 4 \end{cases}$

D'où E(-1, 1 , 4).

Exercice 3 :

1. Le rapport de f est $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{\frac{1}{2}OA}{OA}=\dfrac{1}{2}$.

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc l'angle de S est $\dfrac{\pi}{4}$.

2. a) B' = f(B) équivaut à $OB'=\dfrac{1}{2}OB$ et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

$$OB'=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OA=OA' \text{ et } \left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc le triangle OA'B' est isocèle et rectangle en O.

b) On a : $OB'=OA'$ et $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)[2\pi]$ donc B' est le symétrique de A' par rapport à (OB).

c) H appartient à [AB] donc f(H) appartient f([AB]) = [A'B'].

H est le projeté orthogonal de O sur (AB) donc H' est le projeté orthogonal de O sur (A'B') . Comme OA'B' est un triangle isocèle et rectangle en O alors H' est le milieu de [A'B']. Il en résulte : f(H) = H'.

3. a) On a : I milieu de [A'B] et J milieu de [AA'] donc $JI=\dfrac{1}{2}AB=AH=OH$ car OAH est un triangle isocèle et rectangle en H.

D'où il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) On a : $\left(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{OH}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OH}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{OH}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HO}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{OH}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc R est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) On a K milieu de [AB'] et J milieu de [AA'] donc $JK = \frac{1}{2}A'B' = A'H' = OH'$

et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'H'},\overrightarrow{OH'}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{H'A'},\overrightarrow{H'O}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) On a : JK = OH', $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et R(J) = O donc R(K) = H'.

e) On a : R(I) = H et R(K) = H' donc IK = HH' et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{HH'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4. On a : H milieu de [BA] et I milieu de [BA'] donc $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Et : K milieu de [B'A] et H' milieu de [B'A'] donc $\overrightarrow{KH'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. D'où $\overrightarrow{KH'} = \overrightarrow{HI}$ et par suite IHKH' est un parallélogramme.

Or IK = HH' et (IK) et (HH') sont perpendiculaires alors IHKH' est un carré.