Le produit scalaire

cours et applications

- cours sur le produit scalaire
- applications du produit scalaire

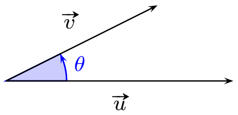
Cours sur le produit scalaire

1. Produit scalaire et angle

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$



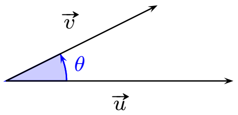
l'angle entre les vecteurs est aigu

1. Produit scalaire et angle

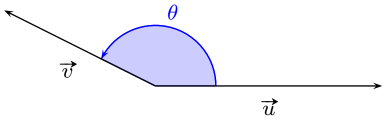
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$



l'angle entre les vecteurs est aigu



l'angle est obtu

2. Produit scalaire et projection

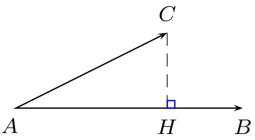
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Soient A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{lorsque } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{lorsque } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens

2. Produit scalaire et projection

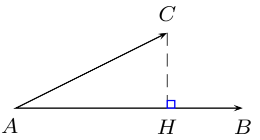
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Soient A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

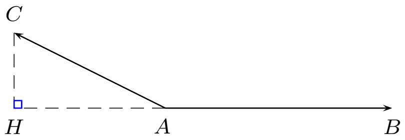
Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{lorsque } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{lorsque } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens



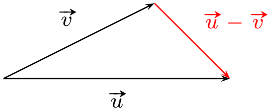
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires

3. Produit scalaire et normes

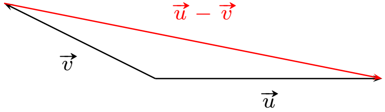
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$



le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est relativement petit



$\vec{u} - \vec{v}$ est relativement grand

Théorème

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel.

Commutativité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Linéarité

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Distributivité

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Inégalités

$$-||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \leq \vec{u}\cdot\vec{v} \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

Théorème d'orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

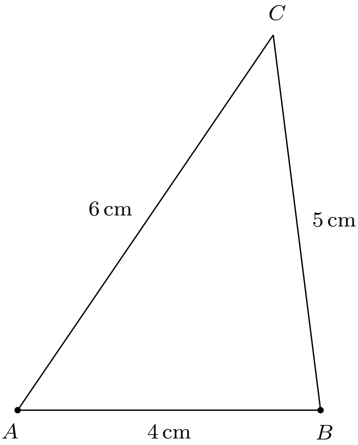
Applications du produit scalaire

- relations métriques dans le triangle
- géométrie analytique
- trigonométrie

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ et $AC = 6\,\text{cm}$.

Déterminer la mesure des angles du triangle ABC.



Exercice 1

Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exprimons le produit scalaire de deux façons différentes

$1^{\text{ère}}$ définition

on sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 6 \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$3^{\text{ème}}$ définition

on a aussi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2\right)$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(4^2 + 6^2 - 5^2\right)$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 13,5$

Exercice 1

Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Il nous reste à resoudre l'équation $\quad 24\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 13,5 \qquad$ (E)

$$(E) \iff \quad \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{13,5}{24}$$

$$(E) \iff \quad \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{9}{16}$$

Cette équation admet à 2π près deux solutions ...

Conclusion

La calculatrice donne une valeur approchée de l'angle géométrique : $\quad \widehat{A} \simeq 55,77^\circ$

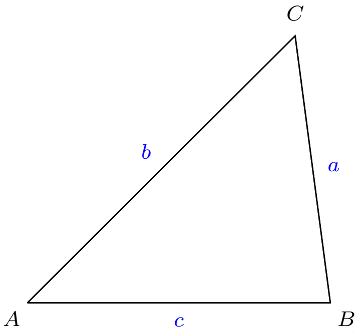
a. Théorème d'Al Kashi

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque.

On notera $\begin{array}{c} a = BC \\ b = AC \\ c = AB \end{array}$ et $\begin{array}{c} \widehat{A} = \widehat{BAC} \\ \widehat{B} = \widehat{ABC} \\ \widehat{C} = \widehat{BCA} \end{array}$

On démontre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$



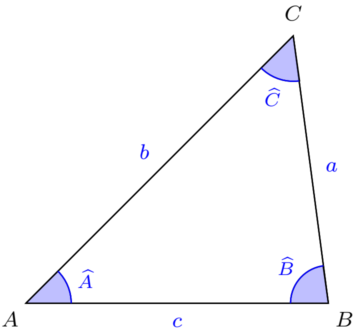
a. Théorème d'Al Kashi

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque.

On notera $\begin{array}{l} a = BC \\ b = AC \\ c = AB \end{array}$ et $\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{BAC} \\ \widehat{B} = \widehat{ABC} \\ \widehat{C} = \widehat{BCA} \end{array}$

On démontre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$



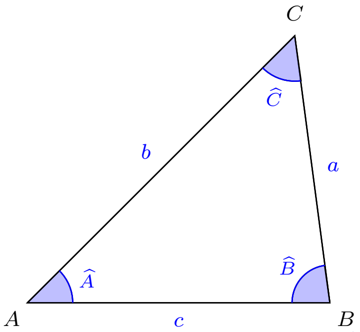
a. Théorème d'Al Kashi ou généralisation du théorème de Pythagore

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque.

On notera $\begin{array}{r} a = BC \\ b = AC \\ c = AB \end{array}$ et $\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{BAC} \\ \widehat{B} = \widehat{ABC} \\ \widehat{C} = \widehat{BCA} \end{array}$

On démontre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$



Théorème

Soit ABC un triangle quelconque.

On démontre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Démonstration

on sait que	$a^2 = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$
donc	$a^2 = \overrightarrow{BC}^2$
donc	$a^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$
donc	$a^2 = (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$
donc	$a^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$
donc	$a^2 = c^2 + b^2 - 2\times AC\times AB\times\cos\widehat{BAC}$
d'où	$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque.

On démontre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Remarque

Par permutation, on a aussi évidemment

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Exercice 2

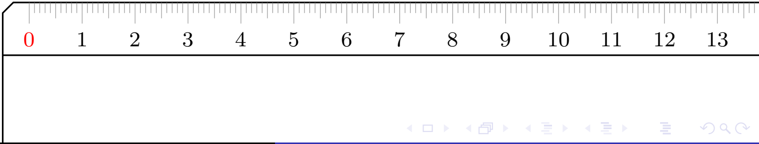
Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

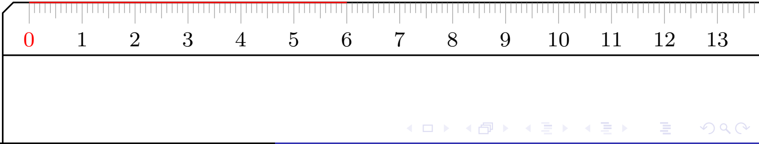
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

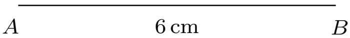
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

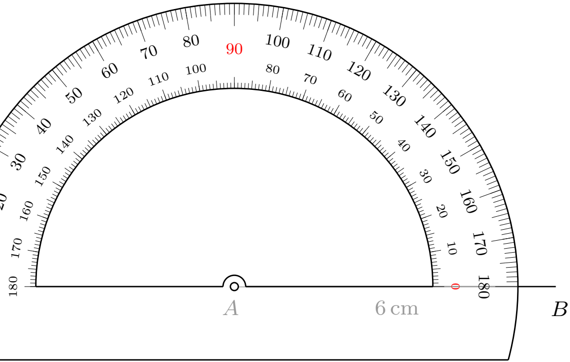
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

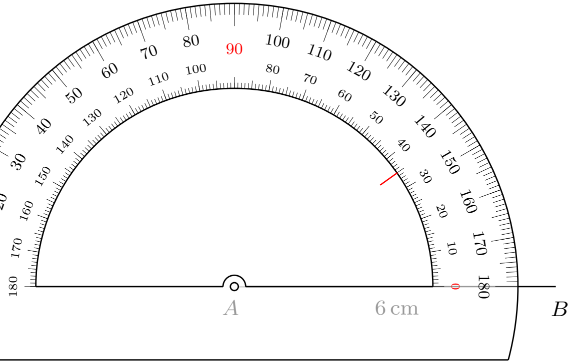
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

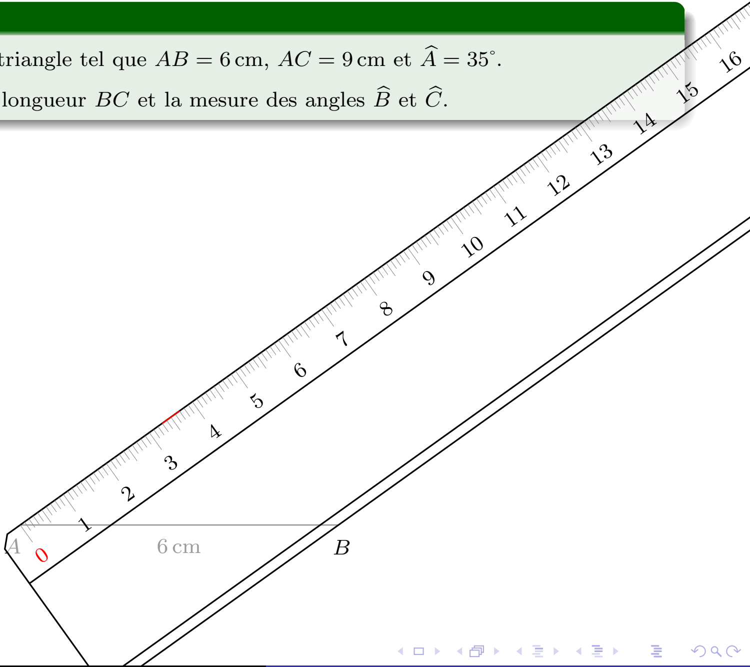
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

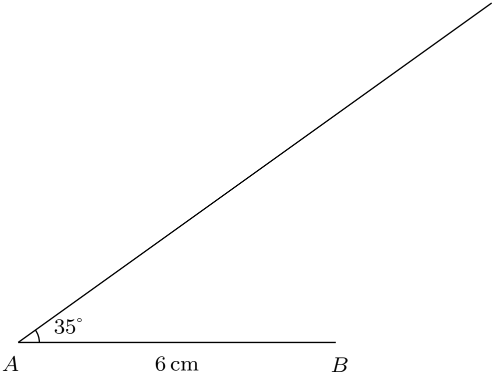
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

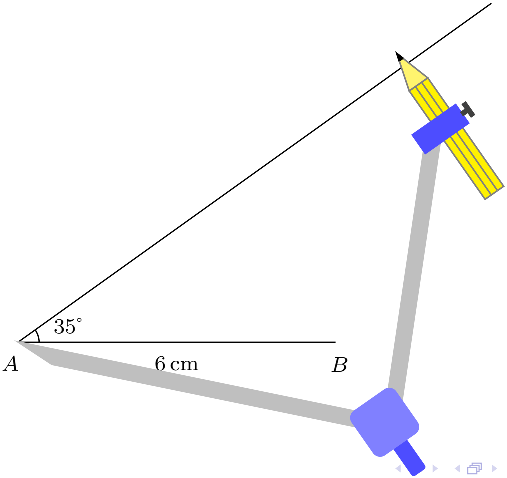
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

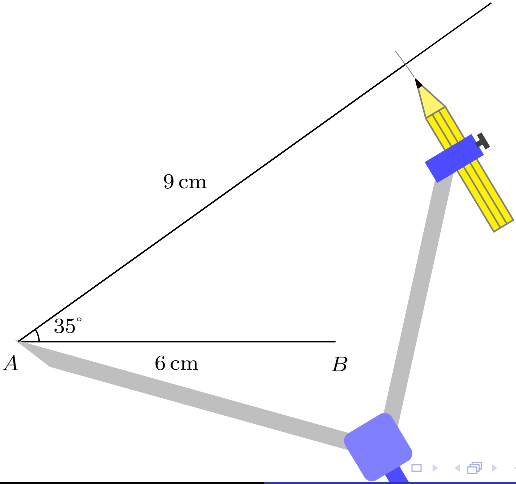
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

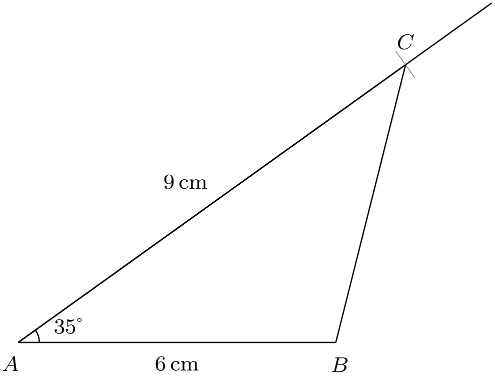
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

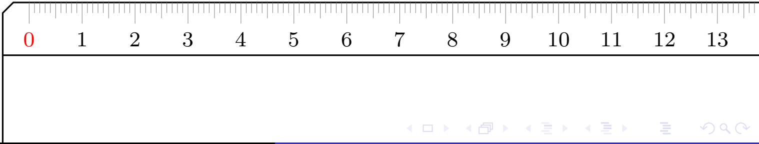
Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

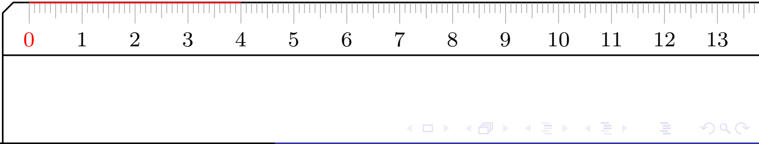
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

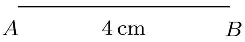
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

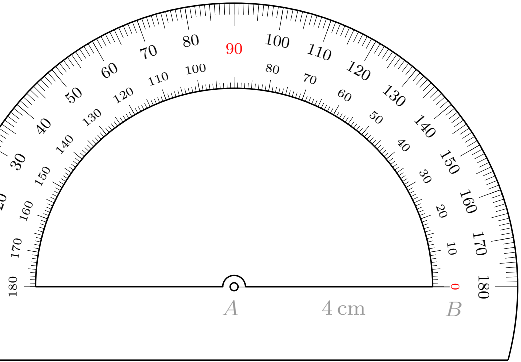
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

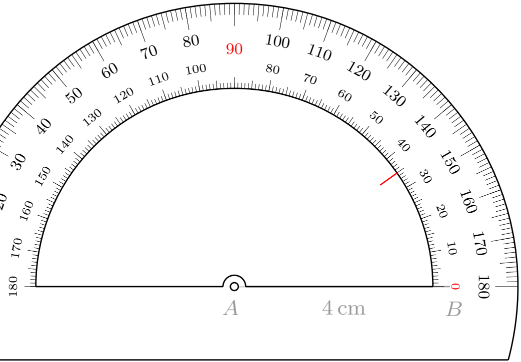
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

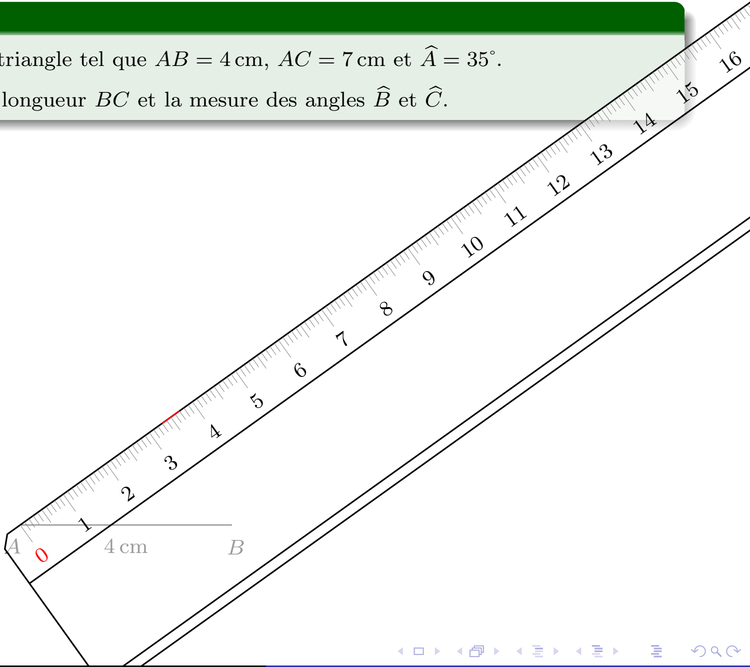
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

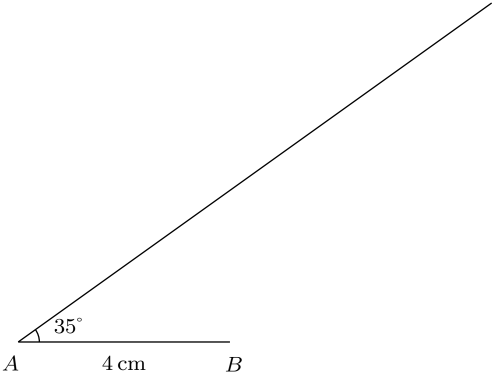
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

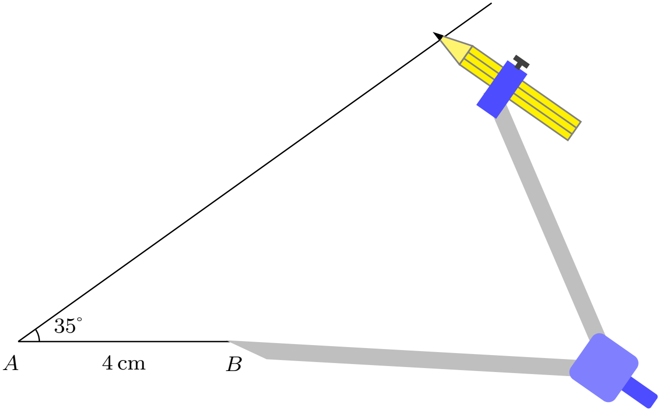
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

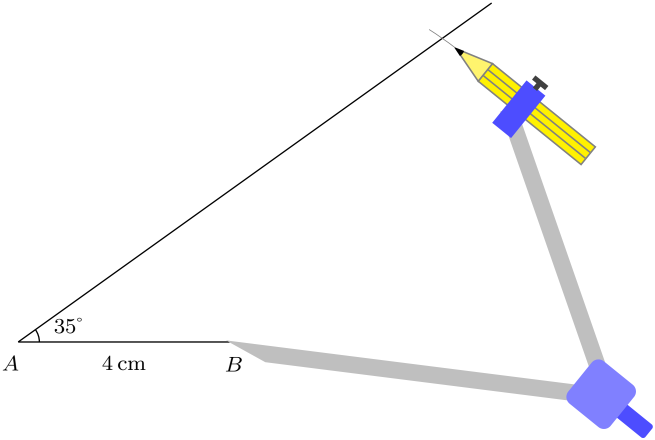
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

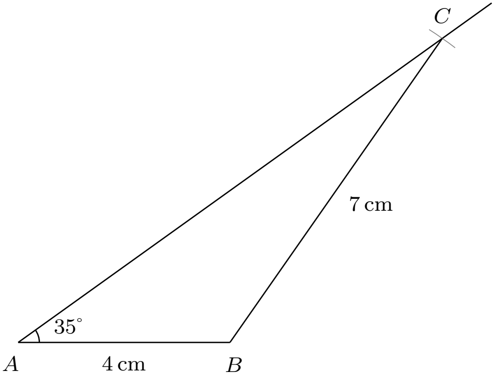
Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ et $\widehat{A} = 35^\circ$.

Déterminer la longueur BC et la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

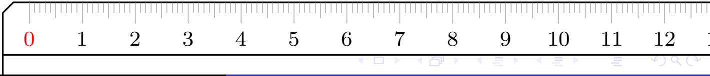


Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.

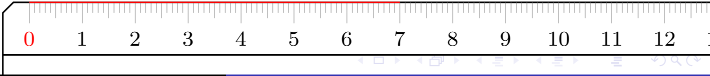
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



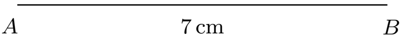
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



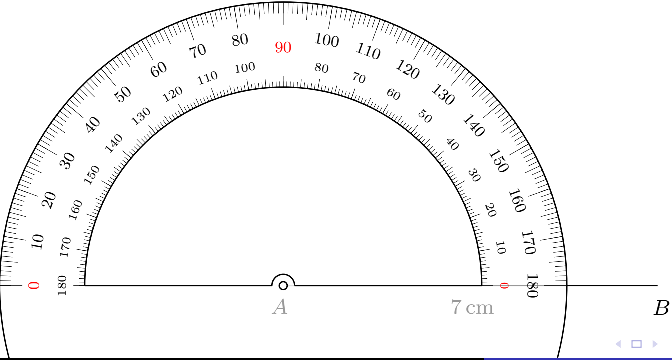
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



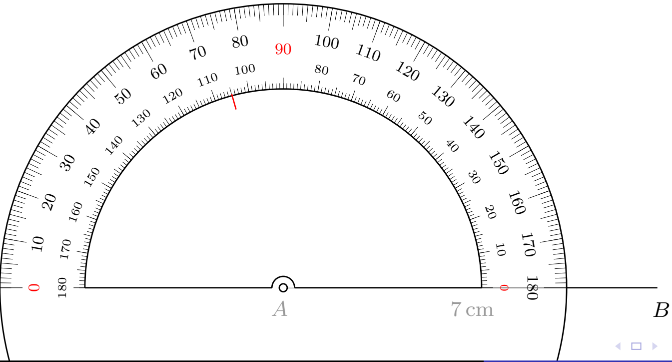
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



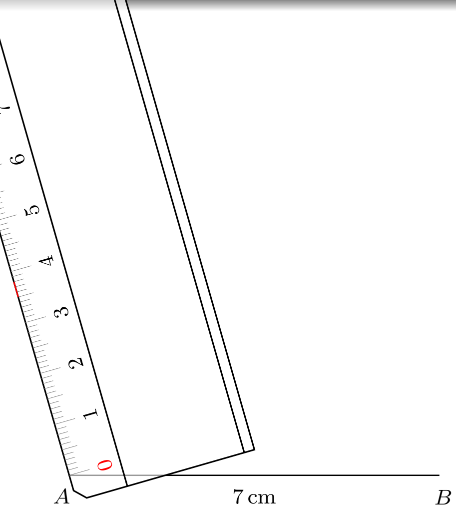
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



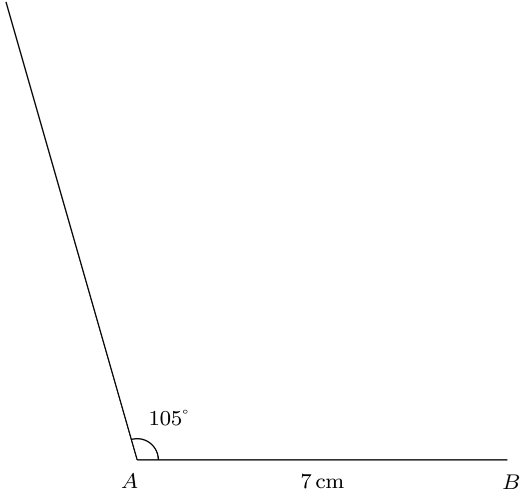
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



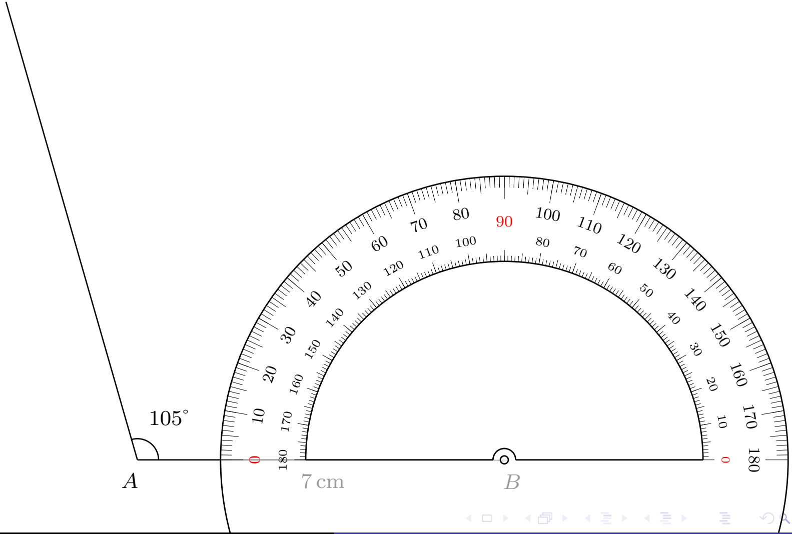
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



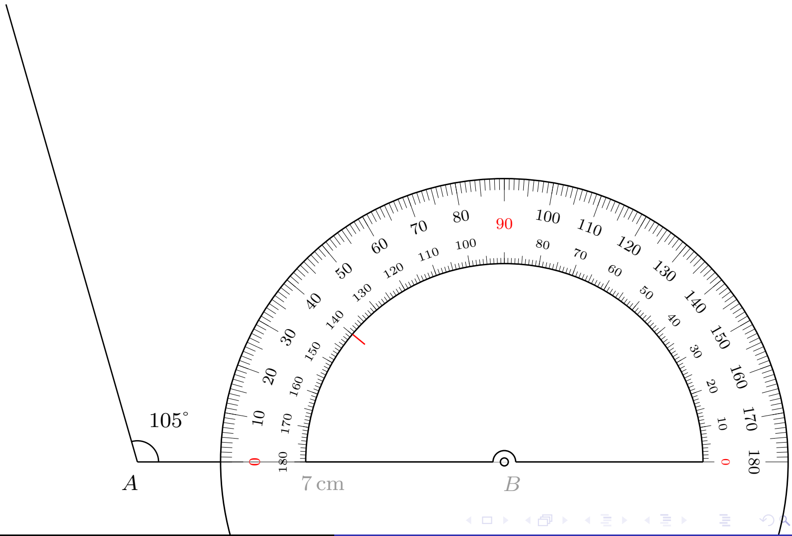
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



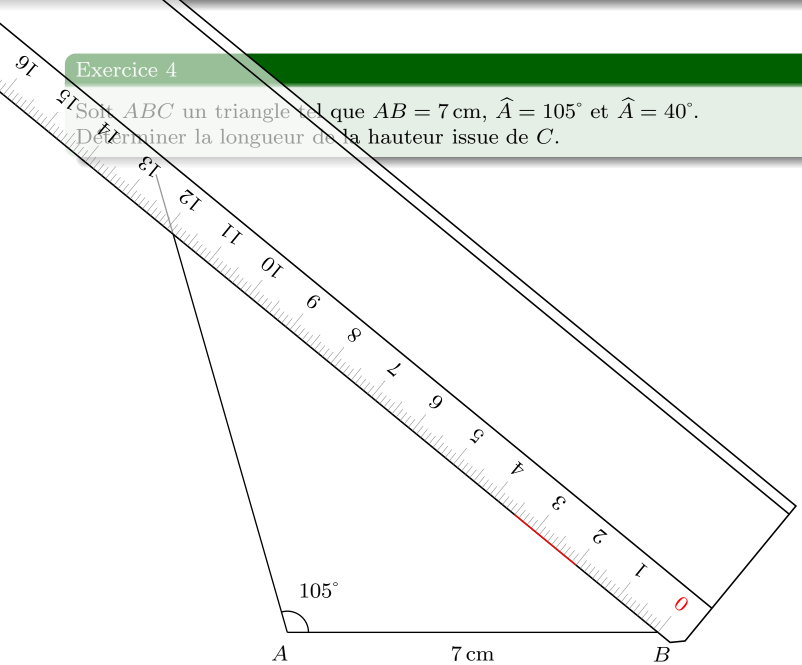
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



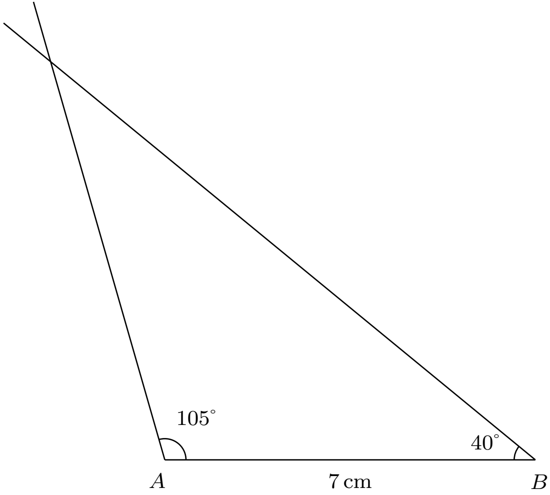
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



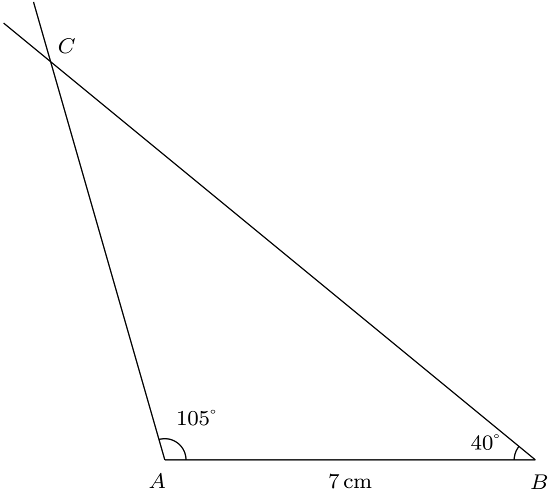
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



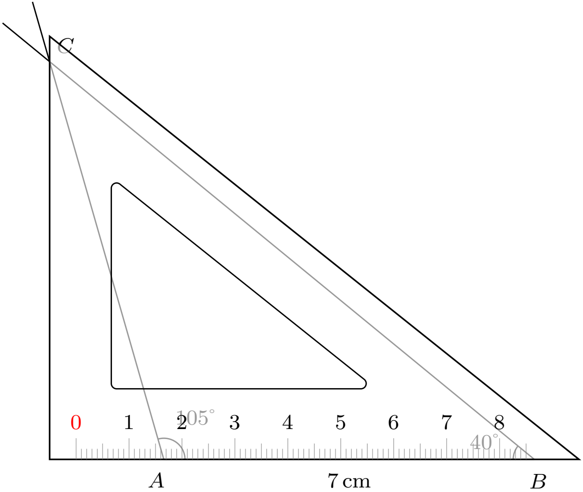
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



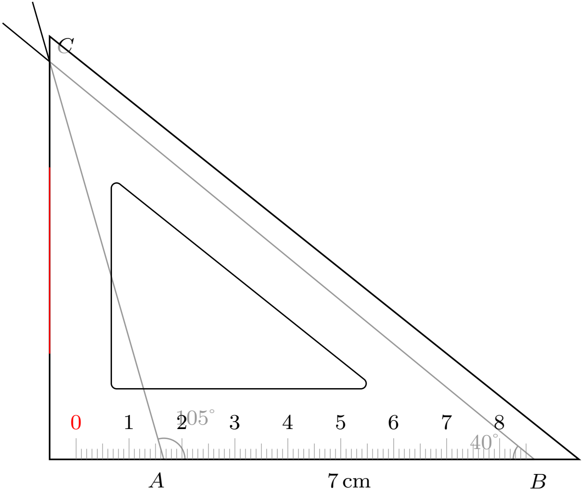
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



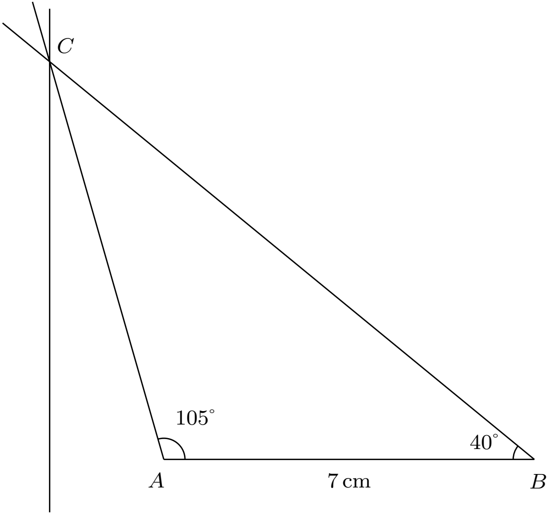
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



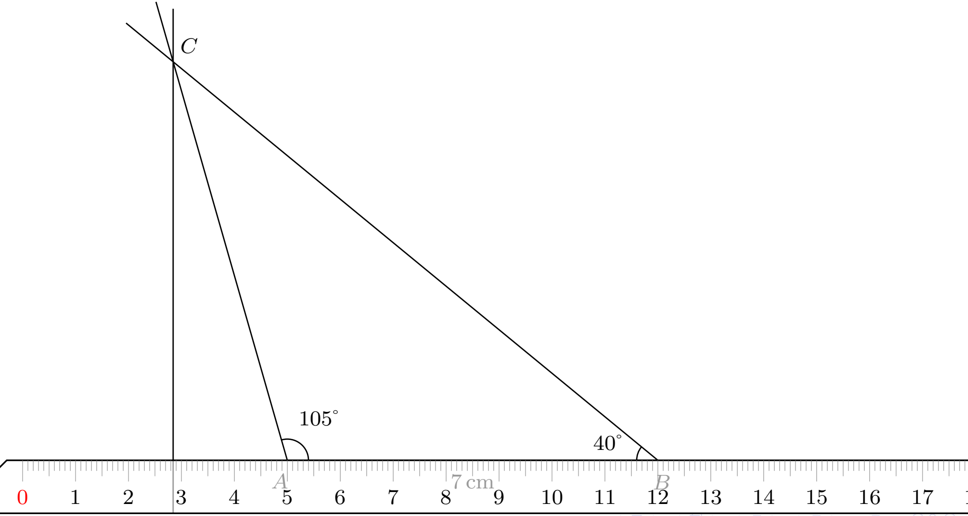
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



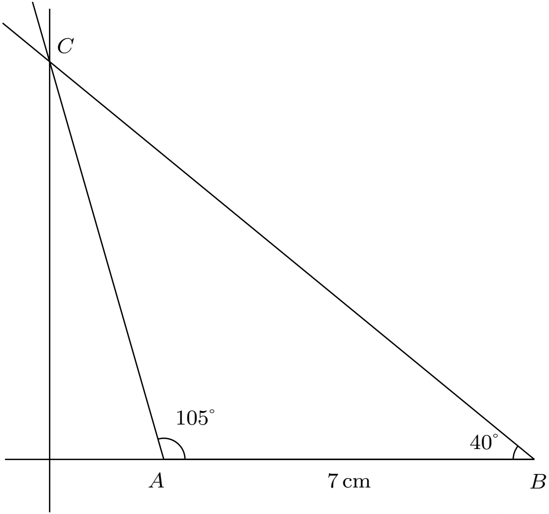
Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.



Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 105^\circ$ et $\widehat{A} = 40^\circ$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de C.