

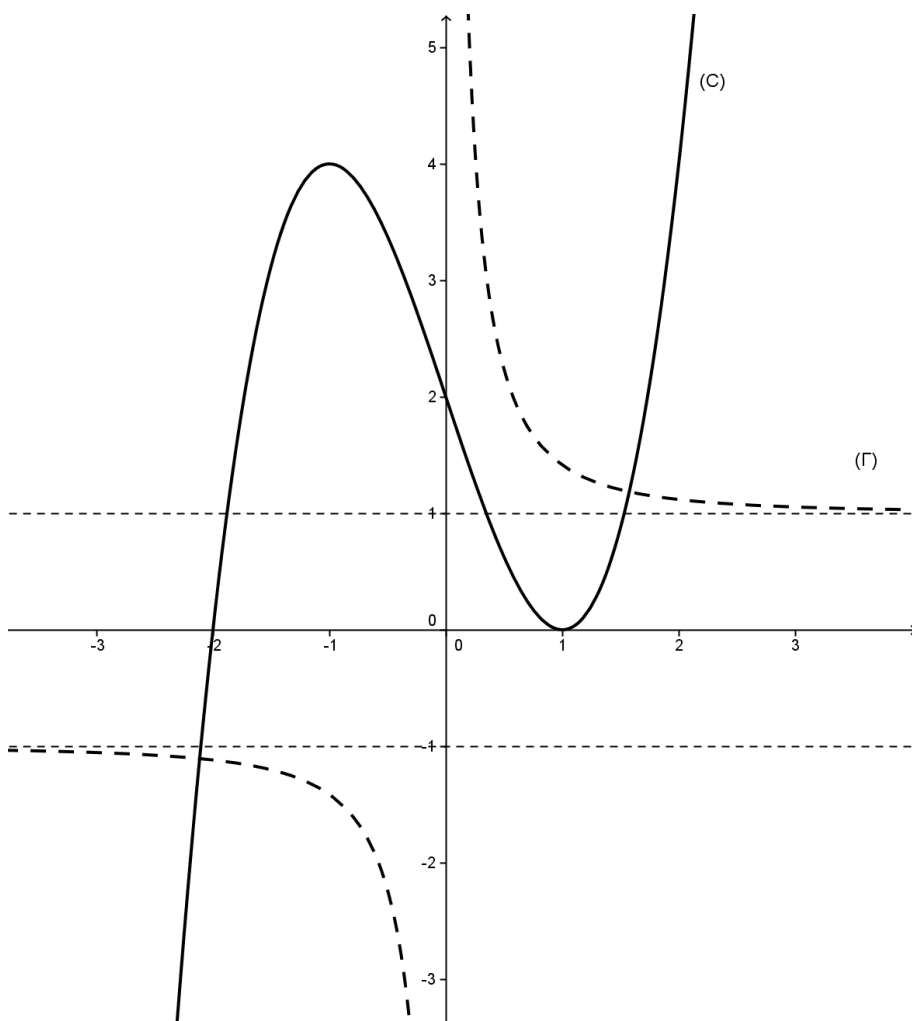
Lycée Ibn Khaldoun Radès	Devoir de contrôle n°1 (2 heure)	4^{ème} Maths 1
Mr ABIDI Farid	Mathématiques	<i>Mercredi 9 Novembre 2011</i>

Exercice 1 : (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux questions propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Si f est impaire et g est paire alors $g \circ f$ est impaire.
2. Si f est strictement décroissante sur un intervalle I et g est strictement décroissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est strictement croissante sur I .
3. Une racine quatrième du nombre complexe $\frac{-1+i\sqrt{3}}{8}$ est $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$.
4. Si z est un complexe tel que $z^2 - 4z + 8 = 0$ alors $|z| = 2\sqrt{2}$.

Exercice 2 : (4 points)



Le plan est rapporté à un repère orthonormé. (C) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et (Γ) est celle d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

Par lecture graphique , Déterminer :

- $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} g \circ f(x)$
- $\text{gof}]-\infty, -2[$, $\text{gof}]-2, 1[$ et $\text{gof}]1, +\infty[$

Exercice 3: (6 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, notée u_n .
- Calculer u_1 et u_2 ; puis vérifier que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < \frac{2}{3}$.
- Montrer que, pour tout x de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
- En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n) ?

- Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- a) A l'aide de la question 2., encadrer u_n^n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n$.
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 9u_n^2$ et préciser ℓ .

Exercice 4: (6 points)

- α étant un réel de l'intervalle $]0, \pi[$, on considère l'équation (E): $z^2 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z + 2 = 0$.
a) Montrer que : si z est une solution de (E) alors $\bar{z}$ est une solution de (E).
b) Vérifier que $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\alpha}$ est une solution de (E). En déduire l'autre solution z_2 de (E).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on prend dans toute la suite

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixe respectives z_1 et z_2 .

- a) Vérifier que M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ de centre O dont on précisera le rayon.

b) Soit B le point d'affixe $z_B = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. Montrer que B appartient à $(\mathcal{C})$.

- Soit C le point dont l'affixe $z_C = -iz_B + 2$. La droite (BM_1) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[OM_1]$ en D .

Déterminer z_C . Montrer que le triangle BCM_1 est isocèle et rectangle en M_1 et que D est milieu du segment $[BM_1]$.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Vrai

Exercice 2 :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} g \circ f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} g \circ f(x) = -\infty$
2. $f(]-\infty, -2[) =]-\infty, 0[$ et $g(]-\infty, 0[) =]-\infty, -1[$ donc $g \circ f(]-\infty, -2[) =]-\infty, -1[$
 $f(]-2, 1[) =]0, 4[$ et $g(]0, 4[) = [g(4), +\infty[$ donc $g \circ f(]-2, 1[) = [g(4), +\infty[$
 $f(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$ et $g(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$ donc $g \circ f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$

Exercice 3 :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Pour tout entier n non nul, f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Si $n = 1$, alors Pour tout x réel positif, $f_1(x) = 9x^2 + x - 4$ donc $f_1'(x) = 18x + 1 > 0$

Si $n > 1$, alors pour tout x réel positif, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geq 0$ et $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$f_n(\mathbb{R}^+) = [f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)] = [-4, +\infty[.$$

$$0 \in f_n(\mathbb{R}^+)$$

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$.

2. u_1 est l'unique solution positive de $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 4 = 0$; Les solutions de de cette

$$\text{équation sont : } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{97}}{18} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{97}}{18} > 0 \text{ d'où } u_1 = \frac{-1 + \sqrt{97}}{18}.$$

$$u_2 \text{ est l'unique solution positive de } f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{5} \text{ d'où } u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

On a : pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = -4$ et $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \times \frac{4}{9} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 > 0$ donc

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right).$$

Et comme f_n est strictement croissante alors $0 < u_n < \frac{2}{3}$

3. Pour tout x de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1) < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

4. Pour tout entier n non nul, $u_n \in]0, 1[$ donc $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n)$. Comme $f_n(u_n) = 0$, alors $f_{n+1}(u_n) < 0$.

Comme pour tout entier naturel n non nul, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, il en résulte : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$.

Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante, par suite la suite (u_n) est croissante.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

6. Soit ℓ de la limite (u_n) .

a) Pour tout entier naturel n non nul, $0 < u_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, alors

puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$.

b) $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 9u_n^2 = u_n^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 9u_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$.

Il en résulte : $4 - 9\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = \frac{4}{9}$ d'où $\ell = \frac{2}{3}$.

Exercice 4:

α étant un réel de l'intervalle $]0, \pi[$, on considère l'équation (E): $z^2 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z + 2 = 0$.

1. a) si z est une solution de (E) alors $z^2 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z + 2 = 0$

$$\text{donc } \overline{z^2 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z + 2} = 0 \text{ d'où } (\bar{z})^2 - \sqrt{2}(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha})\bar{z} + 2 = 0.$$

Ainsi $\bar{z}$ est une solution de (E).

b) Soit $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\alpha}$,

$$z_1^2 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z_1 + 2 = 2e^{-2i\alpha} - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\sqrt{2}e^{-i\alpha} + 2 = 2e^{-2i\alpha} - 2 - 2e^{-i\alpha} + 2 = 0$$

Donc $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\alpha}$ est une solution de (E).

L'autre solution z_2 de (E) vérifie $z_1 z_2 = 2 \Leftrightarrow z_2 = \frac{2}{\sqrt{2}e^{-i\alpha}} \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{i\alpha}$.

Remarque :

ou encore z_2 vérifie $z_1 + z_2 = \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \Leftrightarrow z_2 = z_1 - \sqrt{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{i\alpha}$.

2. Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et les affixes respectives des points M_1 et M_2 sont $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$.

a) $OM_1 = |z_1| = \sqrt{2}$ et $OM_2 = |z_2| = \sqrt{2}$ donc les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Soit B le point d'affixe $z_B = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$, $OB = \left| -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$ donc B appartient à ($\mathcal{C}$).

3. Soit C le point dont l'affixe $z_C = -iz_B + 2$ et que D le point diamétralement opposé à C sur ($\mathcal{C}$) le cercle de diamètre $[OM_1]$.

$$z_C = -iz_B + 2 = \frac{i}{5} + \frac{7}{5} + 2 = \frac{17}{5} + \frac{i}{5}.$$

$$\frac{z_{\overline{CM_1}}}{z_{\overline{BM_1}}} = \frac{z_1 - z_C}{z_1 - z_B} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{17}{5} - \frac{i}{5}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i} = \frac{1-i - \frac{17}{5} - \frac{i}{5}}{1-i + \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i} = \frac{-\frac{12}{5} - \frac{6}{5}i}{\frac{6}{5} - \frac{12}{5}i} = \frac{-2-i}{1-2i} = \frac{2i^2-i}{1-2i} = \frac{-i(1-2i)}{1-2i} = -i$$

D'où $\left| \frac{z_{\overline{CM_1}}}{z_{\overline{BM_1}}} \right| = |-i| \Leftrightarrow \left| \frac{z_{\overline{CM_1}}}{z_{\overline{BM_1}}} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{CM_1}{BM_1} = 1 \Leftrightarrow CM_1 = BM_1$. Donc le triangle BCM_1 est isocèle et rectangle en M_1 .

Une équation de la droite (BM_1) : $2x + y - 1 = 0$ et l'équation cartésienne du cercle ($\mathcal{C}$) est

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 5x^2 - 7x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ donc } D\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Les coordonnées du milieu du segment $[BM_1]$ sont : $\frac{-\frac{1}{5}+1}{2} = \frac{2}{5}$ et $\frac{\frac{7}{5}-1}{2} = \frac{1}{5}$. Donc D est milieu de $[BM_1]$