Lycée Ibn Khaldoun - Radès	Devoir de contrôle n°2 (1 heure)	2ème Sciences 1
Mr ABIDI Farid	**Mathématiques**	*Lundi 21 Novembre 2011*

Exercice 1: (4 points)

Réponde par Vrai ou Faux aux propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. L'équation $12x^2 - 2011x + 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines inverses.
2. Si ABC étant un triangle isocèle en A alors l'ensemble des points du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ est la médiatrice du segment [BC].
3. Si $P(x) = (x+1)^4 - (x-1)^4 - 2x^2$ alors P est un polynôme de degré 2.
4. L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 2 : (6 points)

Soit P le polynôme défini par $P(x) = -x^3 + 8x^2 - 21x + 18$.

1. Vérifier que 3 est zéro de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que pour tout réel x, on a : $P(x) = (x-3)Q(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x)= 0
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$

Exercice 3 : (10 points)

ABC un triangle de centre de gravité G. On note I le milieu du segment [BC] et D le point défini par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. La parallèle à la droite (BC) menée par G coupe le segment [AC] en E.

(Voir annexe ci-joint à la page 2).

1. Montrer que B est le barycentre de (A,1) et (D,1).
2. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Trouver les coefficients a et b tels que E soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (C, b).
3. a) Montrer que I est le barycentre de (A,1), (D, 1) et (C, 2). En déduire que les points I, D et E sont alignés.
   b) Préciser la position de I sur [DE].

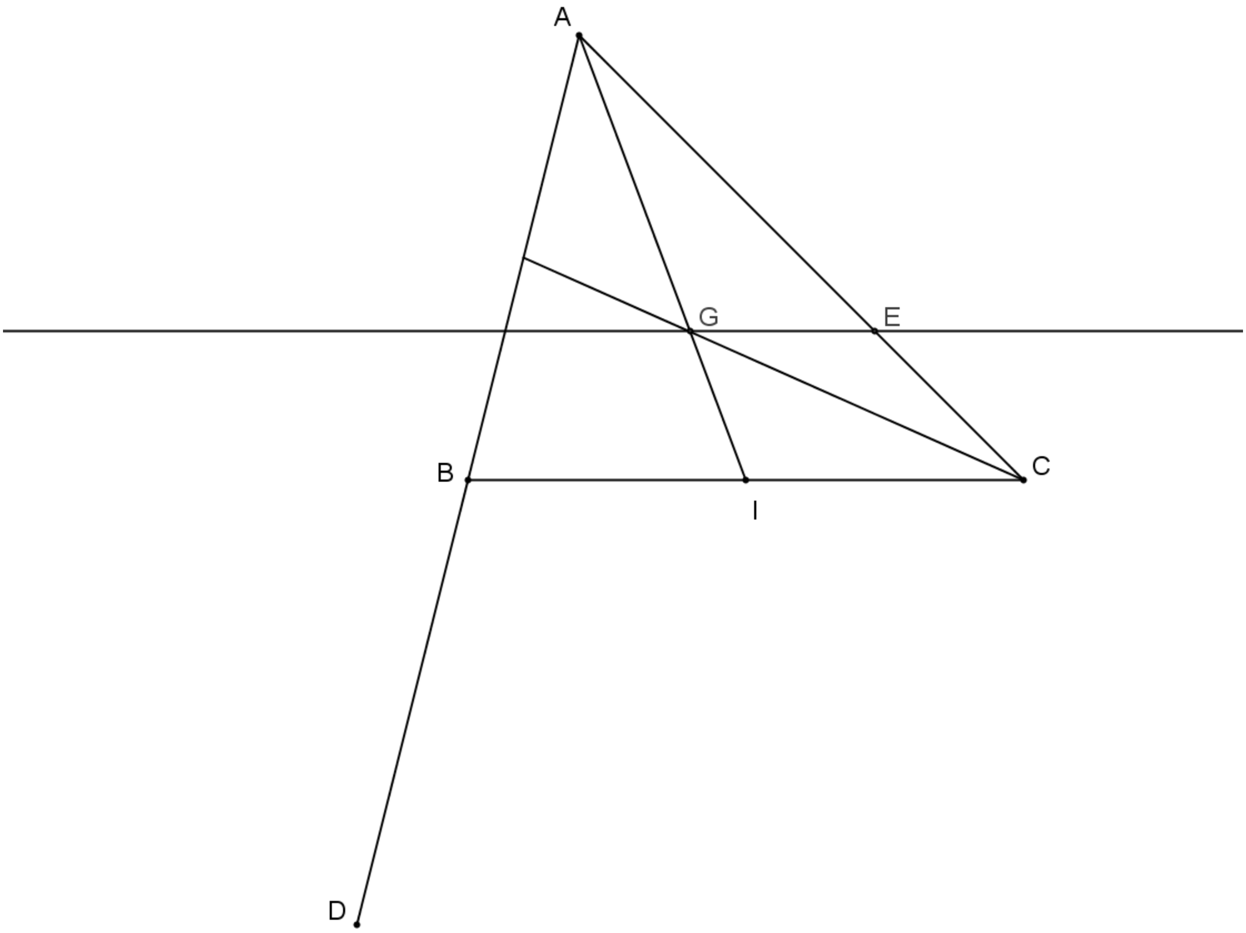
4. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

Nom de l'élève : …………………………………………………………..

ANNEXE POUR L'EXERCICE 3

Figure à compléter et à rendre.



Exercice 1 :

Bien que la justification n'est pas demandée , nous la donnerons à titre indicatif

1. Vrai

En effet : le produit des racines x_1 et x_2 de l'équation $12x^2 - 2011x + 12 = 0$ est $x_1.x_2 = \frac{12}{12} = 1$

donc les racines sont inverses.

2. Vrai

En effet : soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] ,

Pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$, il en résulte :

$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$ équivaut à 2 MI = 2 MJ équivaut à MI = MJ.

3. Faux.

En effet : pour tout réel x ,

$$P(x) = (x+1)^4 - (x-1)^4 - 2x^2 = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1 - \left(x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1\right) - 2x^2$$
$$= 12x^3 - 2x^2 + 12x$$

4. Vrai.

En effet :

Pour tout x réel , $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$.

Ainsi , f(x) est défini si, et seulement si, $(x-1)^3 \neq 0$ si , et seulement si , $x \neq 1$.

Exercice 2 :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = -x^3 + 8x^2 - 21x + 18$

1. P(3) = -27 +72 – 63 + 18 = -90 + 90 = 0 donc 3 est un zéro de P.
2. d°(P) = 3 et d°(P) = 1 + d°(Q) donc d°(Q) = 2 d'où $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec a est une réel non nul.

   $Q(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$

   $$\begin{cases} a = -1 \\ b - 3a = 8 \\ c - 3b = -21 \\ -3c = 18 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$$

   Ainsi, pour tout x réel , $Q(x) = -x^2 + 5x - 6$.
3. P(x) = 0 équivaut à x = 3 ou $-x^2 + 5x - 6 = 0$

   Résolvons alors l'équation $-x^2 + 5x - 6 = 0$:

On a : a = -1 , b = 5 e t c = -6 donc le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4x1x6 = 1$

Les racines de cette équation sont : $x_1 = \dfrac{-5-1}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-5+1}{-2} = 2$.

Ainsi , l'ensemble des solutions de l'équation P(x) = 0 est S= { 2 , 3}

4) Dressons un tableau de signe de P(x) :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		-		-	0	+	
$-x^2+5x-6$		-	0	+	0	-	
P(x)		+	0	-	0	-	

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de $P(x) \geq 0$ est S' = $]-\infty\,;2] \cup \{3\}$

Exercice 3 :

1. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ équivaut à B est le barycentre de (A, 1) et (D, 1).
2. Dans le triangle AIC , on a : $G \in [AI]$, $E \in [AC]$ et $(GE)\,//\,(IC)$.

G est le centre de gravité du triangle ABC et I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

D'où $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AG}{AI} = \dfrac{2}{3}$ donc $AE = \dfrac{2}{3}AC$.

On en déduit : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Par suite , E est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (C, 2).

3. a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0}$

donc I est barycentre de (A, 1) , (D, 1) et (C, 2).

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{ID} + \left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC}\right) = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{IE} = \vec{0}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IE}$ sont colinéaires d'où les points I, D et E sont alignés.

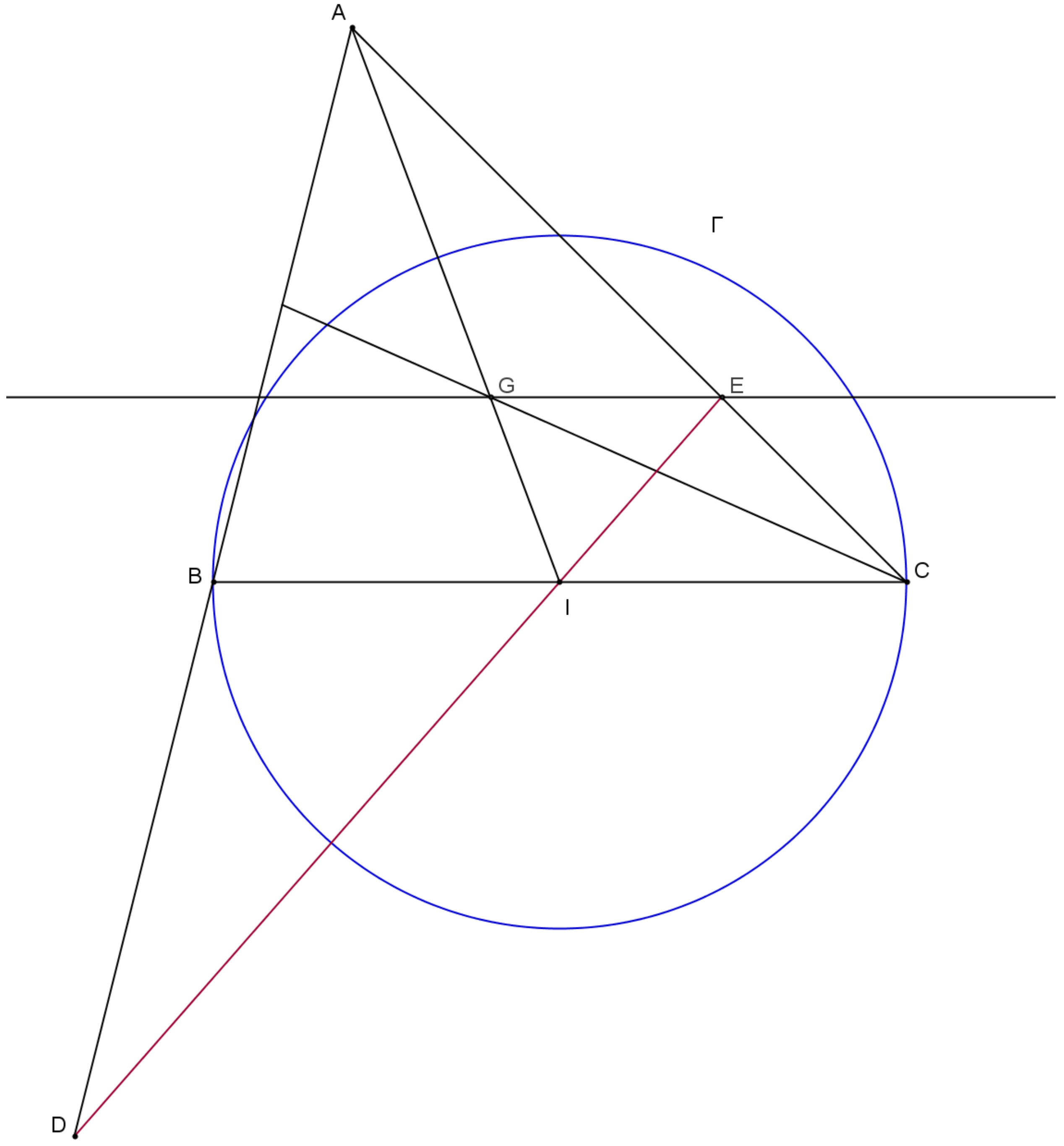
b) $\overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{IE} = \vec{0}$ donc I est le barycentre de (D, 1) et (E, 3) d'où $\overrightarrow{DI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

4. Pour tout point M du plan ,

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$ et $2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\right) = 2\overrightarrow{CB}$.

Ainsi : $M \in (\Gamma)$ équivaut à $\left\|4\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{CB}\right\|$ équivaut à 4 IM = 2 BC équivaut à IM = $\dfrac{1}{2}BC$ équivaut à IM = IB.

Donc (Γ) est le cercle de centre I et de rayon IB .


A
Γ
G
E
B
C
I
D