EXERCICE 1 :

1) **c** 2) **a** 3) **a** 4) **c**

EXERCICE 2 :

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C non alignés don ils déterminent un plan P.

b) $A(2\ ,\ 1\ ,\ 1)$ et $2-1-1=2-2=0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x-y-z=0$

$B(1\ ,\ 1\ ,\ 0)$ et $1-1-0=0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation $x-y-z=0$

$C(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$ et $1-0-1=0$ donc les coordonnées de C vérifient l'équation $x-y-z=0$

Ainsi $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) a) $D(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$. $2-0-0=2\neq 0$ donc D n'appartient pas au plan P donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

ou encore : $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\-1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$

b) $\mathcal{V}$: le volume du tétraèdre ABCD. $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$

3) a) $I\ (\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2})$ .La sphère (S) de rayon R = ID = $\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$IA=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ = R donc (S) passe par A.

$IB=\sqrt{(1-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ = R donc (S) passe par B

b) $\{A,B\}\in(S)\cap P$ et comme A≠B donc P coupe (S) suivant un cercle ($\mathscr{C}$).

c) $\{A,B\}\in(S)\cap P$ donc $\{A,B\}\in(\mathscr{C}$) et comme $IC=\sqrt{(1-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ = R donc (S) passe par C, d'où $\{A,B,C\}\in(\mathscr{C}$) ainsi ($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) a) Δ passe par $I\ (\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2})$ et perpendiculaire au plan P donc le normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ au plan P est un vecteur directeur de Δ. $\Delta:\begin{cases}x=\frac{3}{2}+m\\ y=\frac{1}{2}-m \quad m\in IR\\ z=\frac{1}{2}-m\end{cases}$

b) Ω est le projeté orthogonal de I sur P donc $\Omega\in\Delta$, par suite $\Omega\left(\frac{3}{2}+m\ ,\ \frac{1}{2}-m\ ,\ \frac{1}{2}-m\right)$ et $\Omega\in P$

On remplace les coordonnées de Ω dans l'équation cartésienne de P on obtient

$\frac{3}{2}+m-\frac{1}{2}+m-\frac{1}{2}+m=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+3m=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$

Ainsi $\Omega\left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$

c) On vérifie que D est un point de Δ et comme passe par Ω est perpendiculaire au plan P donc $D\Omega$ est la hauteur de ABCD issue de D ainsi $\mathcal{V}$ = $=\frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times D\Omega$

$D'=S_{\Omega}(D)$ donc $D'\in\Delta$ et $D\Omega=D'\Omega$ ainsi $D'\Omega$ est la hauteur de ABCD' issue de D' ainsi

$\mathcal{V}' = \frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times D'\Omega = \frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times D\Omega = \mathcal{V}$

ou encore : $D' = S_\Omega(D) \Leftrightarrow \Omega$ est le milieu de [DD'] donc $\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{1}{2}(2+x_{D'}) \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{2}y_{D'} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{2}z_{D'} \end{cases}$ d'où $D'\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{6}\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right) = -\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} = \mathcal{V}$$

EXERCICE 3 :

1) a) $f(x) = 2 - x + \ln x$

f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f(x) \in]-\infty, 1]$ donc l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $]-\infty, 1[$ et comme est strictement croissante donc cette solution est unique.

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha + \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \alpha - 2$

b) $f(\alpha) = 0$ d'après le tableau de variation de f on a

$f(x) > 0$ si $x \in]1, \alpha[$

$f(x) < 0$ si $x \in]\alpha, +\infty[$

2) soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n\ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n ; $1 \le u_n \le \alpha$

Pour n = 0 on a $u_0 = 1$ et $1 \le 1 \le \alpha$ donc vrai pour n =0

Supposons que pour n > 0, $1 \le u_n \le \alpha$ et démontrons que $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

$1 \le u_n \le \alpha \Leftrightarrow \ln 1 \le \ln u_n \le \ln\alpha$
$\Leftrightarrow 2 \le 2 + \ln u_n \le 2 + \ln\alpha$

Or $\ln\alpha = \alpha - 2$ d'où $2 \le 2 + \ln u_n \le 2 + \ln\alpha \Leftrightarrow 2 \le u_{n+1} \le \alpha$ donc vrai pour n+1

D'où pour tout entier naturel n ; $1 \le u_n \le \alpha$

b) $u_{n+1} - u_n = 2 + \ln u_n - u_n = f(u_n)$ or $1 \le u_n \le \alpha$ donc $f(u_n) \ge 0$ d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers $\ell \in [1, \alpha]$ et comme $u_{n+1} = g(u_n)$

avec $g : x \mapsto 2 + \ln x$, g est continue sur $]0, +\infty[$ donc g est continue en ℓ d'où ℓ est la solution de l'équation

$g(x) = x \Leftrightarrow 2 + \ln x = x \Leftrightarrow 2 - x + \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ainsi $\ell = \alpha$

EXERCICE 4 :

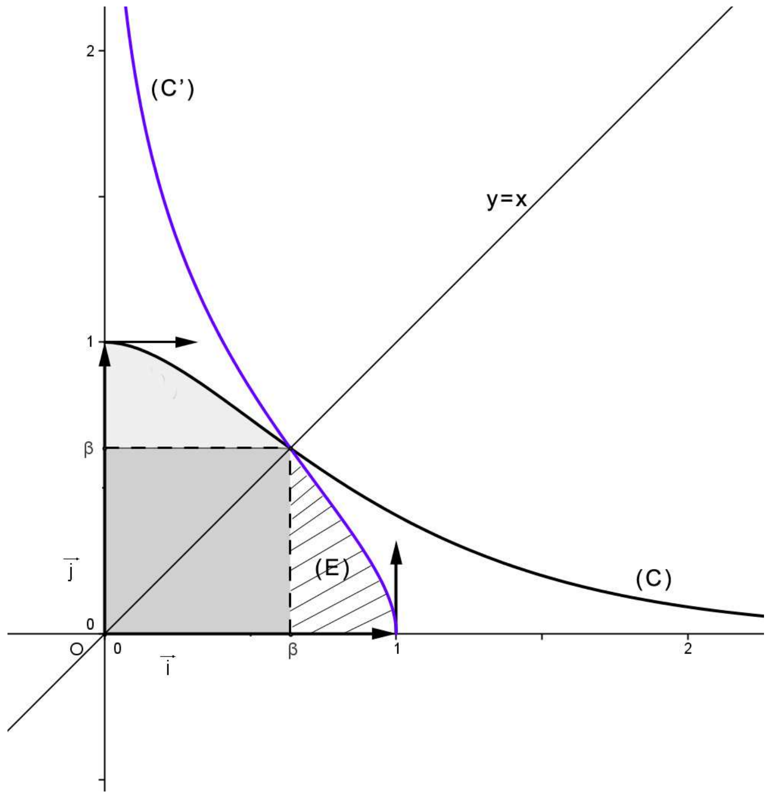
1) a) $f(0) = 1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (l'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$)

$f'_d(0) = 0$ (demi-tangente horizontale au oint d'abscisse 0).

b) f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$

sur $J = f([0, +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f, f(0)\right] =]0, 1]$.

2)



3) a) f est définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$, a et b deux réels.

D'après 1) a) on a : $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'_d(0)=0 \end{cases}$

Or f est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et $f'(x)=ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}=(-2ax+a-2b)e^{-2x}$

Donc $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'_d(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$

D'où pour tout $x\in[0\,,+\infty[$, $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

b) $I=\displaystyle\int_0^{\beta}(2x+1)e^{-2x}\,dx$

on pose : $u(x)=2x+1$ $\quad u'(x)=2$

$v'(x)=e^{-2x}$ $\quad v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$I=\left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^{\beta}+\int_0^{\beta}e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^{\beta}+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\beta}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}e^{-2\beta}+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}-\frac{1}{2}e^{-2\beta}$$

$$=1-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}-\frac{1}{2}e^{-2\beta}=1-\frac{1}{2}(2\beta+2)e^{-2\beta}=1-(\beta+1)e^{-2\beta}$$

c) $\mathscr{A}=\displaystyle\int_{\beta}^{1}f^{-1}(x)\,dx=\int_0^{\beta}f(x)\,dx-\beta^2=\int_0^{\beta}(2x+1)e^{-2x}\,dx-\beta^2=1-\beta^2-(\beta+1)e^{-2\beta}$ u.a