Mathématiques	*Devoir de synthèse n°1*		
Lycée IBN KHALDOUN - RADES			
2 e Sciences 1	Vendredi 09-12-2011	Durée : 2 heures	**Prof : ABIDI Farid**

Exercice n°1 : (3 Points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Quel est le nombre qui, quand on le divise par 11, a pour quotient q et pour reste 2, et quand on le divise par 9, a le même quotient q et pour reste 6 ?

a) 4 ; b) 14 ; c) 24.

2. Quel est le PGCD des nombres 513 et 972 ?

a) 7 ; b) 17 ; c) 27

3. Soit n un entier naturel. Quel est le PPCM de (2n+ 1) et n ?

a) $2n^2$; b) $2n^2 + n$; c) $3n + 1$

Exercice n°2 : (6 Points)

Soit f(x) = $x^3 - 6x^2 + 11\,x\, - 6$

1) a) Donner un zéro du polynôme f.

b) Déterminer les réels a, b et c pour que f(x) = (x − 1) (a x^2 + b x + c)

2) Dans la suite on prend a = 1, b = −5 et c = 6.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f(x) = 0.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation f(x) ≥0

3)Soit $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de g.
b) Simplifier g(x)
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation g(x) ≤ 0.

Exercice n°3 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité de longueur est le centimètre. On donne les points A(3,0) , B(-1, -3) et C(-4, 1).

1. a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

c) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un carré.

2. a) Vérifier que $E\left(-2;\frac{5}{2}\right)$ est le milieu du segment [CD].

b) Calculer , en cm², l'aire du polygone ABED.

Exercice n°4 : (6 Points)

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de diamètre [AC] et D le barycentre des points pondérés (A, -1) et (C,3) On considère un point B sur le cerlce ($\mathscr{C}$) autre que A et C. On note E le point tel que BCDE soit un parallélogramme et F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

1. a) Faites une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice et construire D.
   b) Déterminer l'image de la droite (DC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et l'image de la droite (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
   c) En déduire que les points B, E et F sont alignés.

2. Montrer que F = $t_{\overrightarrow{AD}}$(B) .

3. On suppose que B varie sur le cercle ($\mathscr{C}$) .

Déterminer le lieu du point F ?

Corrigé

Exercice 1 :

1. **c** ; 2. **c** ; 3.**b**

Exercice 2 :

1. a) $f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 11.1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 12 - 12 = 0$

Donc 1 est un zéro du polynôme f.

b) Pour tout x réel, $f(x) = (x-1).(ax^2 + bx + c) = ax^3 - (a-b)x^2 + (c-b)x - c$

d'où $\begin{cases} a = 1 \\ a-b = -6 \\ c-b = 11 \\ -c = -6 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$

2. a) $f(x) = 0$ équivaut à $(x-1).(x^2 - 5x + 6) = 0$ équivaut a $x = 1$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$

Résolvons : $x^2 - 5x + 6 = 0$

On a : $a + b + c = 1 - 5 + 6 = 0$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a} = 6$.

Donc l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $\{-1, 1, 6\}$.

b) Résolvons $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		6		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+		+	
$x^2 - 5x + 6$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

D'où l'ensemble des solutions est $[-1, 1] \cup [6, +\infty[$.

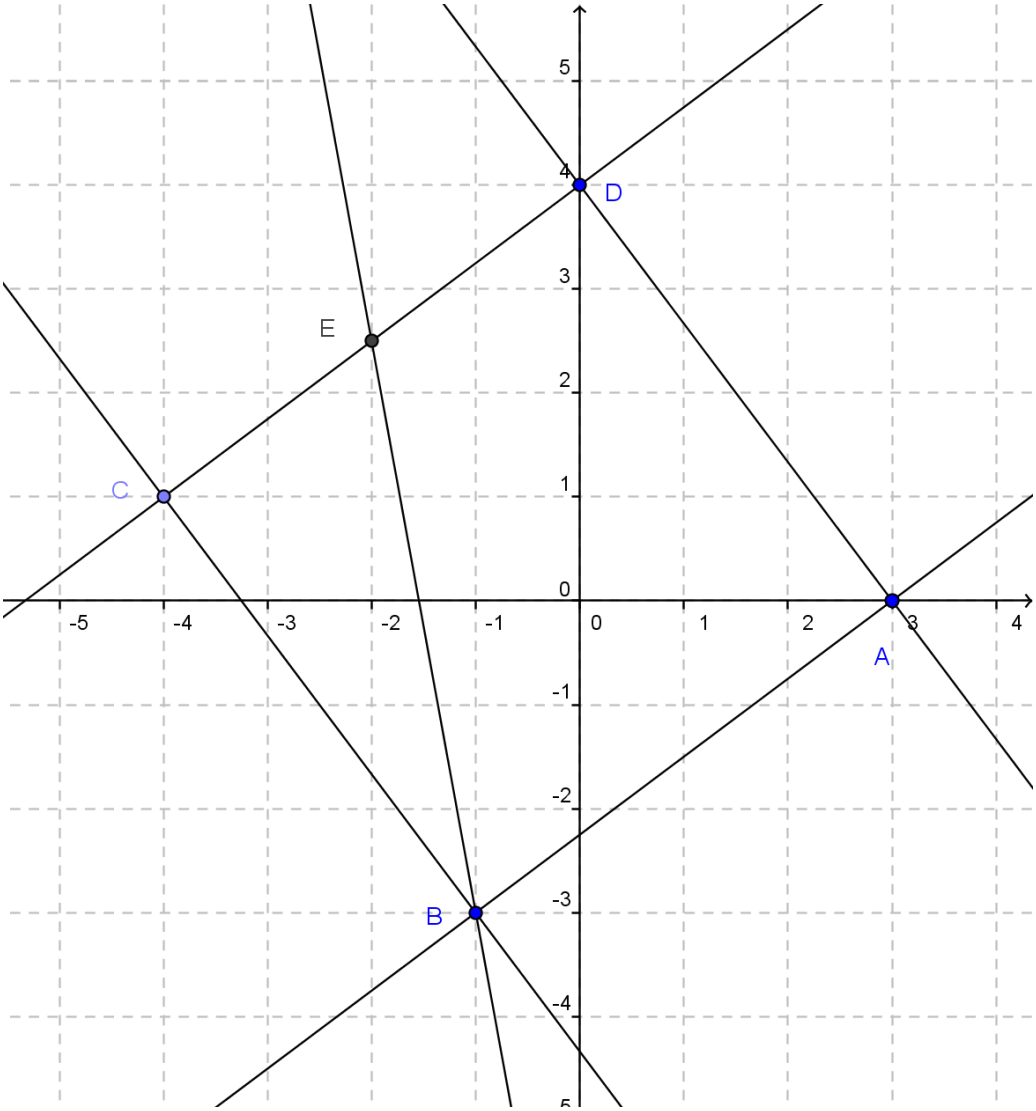
3. a) L'ensemble de définition de g est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 6\}$.

b) Pour tout x de D, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-6)} = \frac{1}{x-6}$.

c) $g(x) \leq 0$ équivaut à $\frac{1}{x-6} \leq 0$ équivaut à $x - 6 < 0$ équivaut à $x < 6$.

Ainsi l'ensemble des solutions de $g(x) \leq 0$ est $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 6[$.

Exercice 3 :



1. a) On a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

b) On a : BA = $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, BC = $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

et (-4).(-3) + (-3).4 = 0 donc les vecteur $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

d'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

c) Pour que ABCD soit un carré , il faut que ABCD soit un parallélogramme d'où

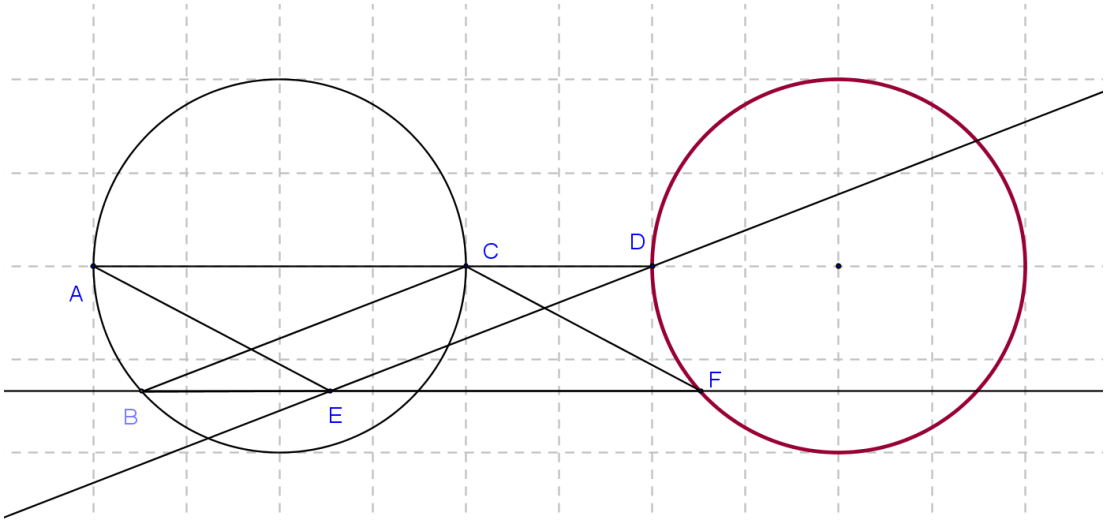
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ équivaut à $\begin{cases}x_D-3=-3\\y_D=4\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}x_D=0\\y_D=4\end{cases}$ donc D(0, 4) .

2. a) E est le milieu de [CD] donc $\begin{cases}x_E=\dfrac{0-4}{2}=-2\\y_E=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ donc $E\left(-2,\dfrac{5}{2}\right)$.

b) L'aire , en cm^2 , du polygone ABED est égale à l'aire du carré ABCD moins celle du triangle BED donc $A(ABED) = A(ABCD) - A(BED) = 5^2 - \frac{1}{2}.5.\frac{5}{2} = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$.

Exercice 4 :

1. a)



b) $t_{\overrightarrow{CB}}((DC))$ est la parallèle à la droite (DC) passant par $t_{\overrightarrow{CB}}(C) = B$

Or BCDE est un parallélogramme donc (DC) // ((BE) donc $t_{\overrightarrow{CB}}((DC)) = (BE)$.

On a : $t_{\overrightarrow{AE}}(A) = E$ et $t_{\overrightarrow{AE}}(C) = F$ donc $t_{\overrightarrow{CB}}((DC)) = (EF)$.

c) Il en résulte : (BE) = (EF) et par suite les points B, E et F sont alignés.

2. On a : BCDE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$

Et $t_{\overrightarrow{AE}}(C) = F$ donc AEFC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF}$.

D'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF}$ donc $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = F$.

3. Lorsque B décrit le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [AC] alors $F = t_{\overrightarrow{AD}}(B)$ décrit le cercle ($\mathscr{C}'$) image du cercle ($\mathscr{C}$) par $t_{\overrightarrow{AD}}$.