| | |
|---|---|
| EXAMEN DU BACCALAUREAT | Epreuve : MATHEMATIQUES |
| SESSION DE JUIN 2013 | Durée :4H ****** Coefficient : 4 |
| Section : Mathématiques | SESSION PRINCIPALE |
| Corrigé proposé par : FARID ABIDI ****** Lycée Ibn Khladoun à RADES | |

## Exercice 1 :

1. $(A_1)$ : Vrai
   En effet, si $33n \equiv 0(2013)$ alors il existe un entier relatif k tel que $33n = 2013k = 33\times 61k$
   D'où $n = 61k$ et par suite $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,61)$.
2. $(A_2)$ : Vrai
   En effet , on a : $33 \wedge 11 = 11$ et $2013 = 11\times 183$ donc 11 divise 2013 donc l'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
3. $(A_3)$ : Vrai
   En effet ,
   - La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ ;
   - La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ;
   - Pour tout x > 0, $\ln x \in \mathbb{R}$
   - $1 \in \mathbb{R}$

   Donc F est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. $(A_4)$ : Faux
   En effet , pour tout x > 0 , $F'(x) = \dfrac{1}{x}.\dfrac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} = \dfrac{x}{x\left[1+(\ln x)^2\right]} = \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.

## Exercice 2 :

A) f est la similitude directe de centre O et qui envoie B en A.

1) On a $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ donc une mesure de l'angle de f est $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Le rapport de f est $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$.

2) a) On a : $f(A) = C \Leftrightarrow \begin{cases} OC = 2OA \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc le triangle OCA est direct.
   La formule d'Al-Kashi donne :
   $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC.\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = OA^2 + 4OA^2 - 2OA^2 = 3OA^2$
   donc $OA^2 + AC^2 = OA^2 + 3OA^2 = 4OA^2 = OC^2$
   d'où le triangle OCA est rectangle en A.
   D'autre part : f(B) = A et f(A) = C donc AC = 2 BA = 2AB.
   b) Voir figure à la page 8-8.

B- g est la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C.

1) Soit Ω le centre de g.

a) $g \circ g$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4 et $g \circ g(B) = g(A) = C$ donc $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, -1)

donc $\overrightarrow{B\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Voir figure à la page 8-8.

2) a) G est le barycentre de (A, 1) et (B, 2) donc $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

g(B) = A , g(G) = H et g(A) = C , on en déduit : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) On a : $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{B\Omega} = \overrightarrow{\Omega B}$.

D'autre part :

$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{G\Omega} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{G\Omega} = \vec{0}$

D'où G est milieu du segment [Ω H].

c) On a:

- g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2
- g(G) = H
- G milieu de [Ω H] $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega H} = 2\overrightarrow{\Omega G}$

Donc l'axe de g est la droite (GH).

## Exercice 3 :

1. a) On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires donc les points I, J et K déterminent un plan (P).

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) donc P : x – y + z +d = 0 où d est un réel.

Comme I(1, 1, 0) appartient à (P) alors 1- 1 + 0 + d = 0 donc d = 0.

Par suite, le plan P est d'équation cartésienne x – y + z = 0.

2) On a : $\overrightarrow{IS}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}=0+2+1=3$ donc le volume du tétraèdre SIJK est

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).IS\right|=\frac{1}{6}.3=\frac{1}{2}\ .$$

3) a) $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$

$$=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$$

$$=\vec{0}+\overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IJ}\right)+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$$

Or M appartient à la droite $(\Delta)$ , alors les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}=\vec{0}$.

Par suite : $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\vec{0}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$ .

b) Le volume du tétraèdre SIJK est : $V'=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MS}\right|$

Or , une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ est $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t,\ t\in\mathbb{R}\\z=-2t\end{cases}$.

Ainsi , $M(1+t,1-t,-2t)$ et $\overrightarrow{MS}\begin{pmatrix}-t\\-2+t\\1+2t\end{pmatrix}$.

D'où $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MS}=-t-(-2+t)+(1+2t)=3$ donc $V'=\frac{1}{2}$.

**Remarque :**

$$V'=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|$$

Or $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ , donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (P) d'où $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{JK}$ . Comme les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JK}$ , alors $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MI}=0$.

Ainsi, $V'=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|=V=\frac{1}{2}$.

4) a) P' = h(P) est le plan parallèle au plan (P) passant par O' = h(O)

Posons O'(x', y', z') , O' = h(O) $\Leftrightarrow \overrightarrow{SO'} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-2 \\ y+1=2 \\ z-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$.

Donc O'(-1, 1, -1).

**Remarque** : l'expression analytique de h est $\begin{cases} x' = 2x+(1-2)x_S \\ y' = 2y+(1-2)y_S \\ z' = 2z+(1-2)z_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y+1 \\ z' = 2z-1 \end{cases}$ donc les coordonnées de O'= h(O) sont (-1, 1, -1).

P' // P donc P' : x – y + z + d' = 0 avec d' est un réel.

O'(-1, 1, -1) $\in P' \Leftrightarrow -1-1-1+d'=0 \Leftrightarrow d'=3$.

Ainsi, P' : x – y + z + 3 = 0 .

b) Remarquons que : $M'=h(M)$, $J'=h(J)$ , $K'=h(K)$ et $S=h(S)$

donc $\overrightarrow{M'J'}=2\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{M'K'}=2\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{M'S}=2\overrightarrow{MS}$.

Le volume du solide MJKM'J'K' est :

$$V'' = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{M'J'}\wedge\overrightarrow{M'K'}\right).\overrightarrow{M'S}\right| - V' = \frac{1}{6}\left|\left(\left(2\overrightarrow{MJ}\right)\wedge\left(2\overrightarrow{MK}\right)\right).\left(2\overrightarrow{MS}\right)\right| - V$$

$$= \frac{8}{6}\left|\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}\right| - V = 8V - V = 7V = \frac{7}{2}$$

## Exercice 4 :

1) a) $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right) = \left(1+e^{i\theta}\right)-1 = e^{i\theta}$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right) = i\left(1+e^{i\theta}\right)-i = ie^{i\theta}$ .

b) Pour tout réel $\theta$ de $[0, 2\pi[$, EM = $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ donc M varie sur le cercle $C_1$

et FN = $\left|i.e^{i\theta}\right| = |i|.\left|e^{i\theta}\right| = 1$ donc F varie sur le cercle $C_2$.

$\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} = \dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$ est imaginaire donc les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{FN}$ sont orthogonaux d'où les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) a) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} = \dfrac{(1-i)\sin\theta.e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}} = (1-i)\sin\theta - e^{-i\theta}$

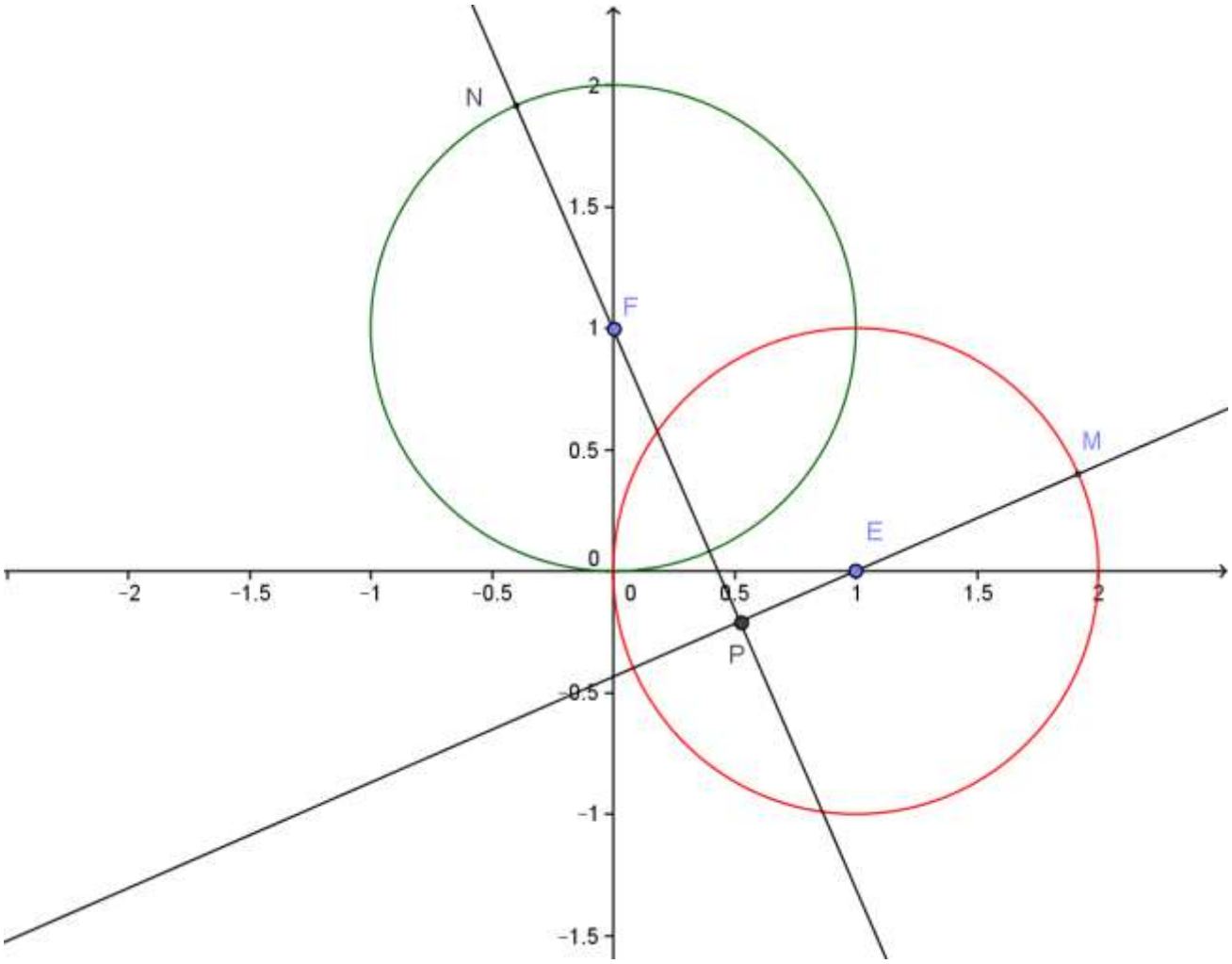
$= \sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = \sin\theta - \cos\theta$

$$\frac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}=\frac{(1-i)\sin\theta.e^{i\theta}-i}{ie^{i\theta}}=\frac{(1-i)\sin\theta-ie^{-i\theta}}{i}=(-1-i)\sin\theta-e^{-i\theta}$$

$$=-\sin\theta-i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta=-\sin\theta-\cos\theta$$

b) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires d'où P appartient à la droite (EM).

$\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{FN}$ sont colinéaires d'où P appartient à la droite (FN).



## Exercice 5 :

**I-** 1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$.

La droite des abscisses est asymptote à la courbe $C_\varphi$ au voisinage de $-\infty$.

La droite d'équation y = 1 est asymptote à la courbe $C_\varphi$ au voisinage de $+\infty$.

b) Le tableau suivant donne le signe de $e^x-1$ pour tout x réel ,

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | | − | 0 | + | |

Il en résulte : $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=-\infty$.

La droite des ordonnées est asymptote à la courbe $C_\varphi$.

c) $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x réel non nul , $\varphi'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}<0$ donc $\varphi$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) On pose , pour tout x réel non nul , $h(x)=\varphi(x)-x$.

Remarquons que pour tout x réel non nul , $h'(x)=\varphi'(x)-1<0$.

- h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ ,
- $h(]-\infty,0[)=\left]\lim\limits_{x\to0^-}h(x),\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)\right[=\mathbb{R}$
- $0\in\mathbb{R}$
- Donc l'équation $\varphi(x)=x$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]-\infty,0[$

De même :

- h est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ ,
- $h(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to0^+}h(x)\right[=\mathbb{R}$
- $0\in\mathbb{R}$
- Donc l'équation $\varphi(x)=x$ admet une unique solution $\beta$ dans l'intervalle $]0,+\infty[$

**II-** 1) a) On a pour tout x réel , $f(x)=e^x-x$ donc $f'(x)=e^x-1$

$\Delta_a:y=f'(a).(x-a)+f(a)\Leftrightarrow\Delta_a:y=(e^a-1)(x-a)+e^a-a$

$\Leftrightarrow\Delta_a:y=(e^a-1)x+(1-a)e^a$

On a pour tout x > 0 , $g(x)=1-x+\ln x$ donc $g'(x)=-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x}$

$$D_b : y = g'(b).(x-b)+g(a) \Leftrightarrow D_b : y = \left(\frac{1-b}{b}\right)(x-b)+1-b+\ln b$$

$$\Leftrightarrow \Delta_a : y = \left(\frac{1-b}{b}\right)x+\ln b$$

b) $\Delta_a // D_b \Leftrightarrow e^a - 1 = \frac{1-b}{b} \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = e^{-a}$.

2) On suppose que $b = e^{-a}$ donc $\Delta_a // D_b$.

a) $\Delta_a = D_b \Leftrightarrow e^a(1-a) = \ln b \Leftrightarrow e^a(1-a) = -a \Leftrightarrow e^a = a(e^a - 1)$

Comme $e^a \neq 0$ , alors $a(e^a - 1) \neq 0$ donc $a \neq 0$ ; il en résulte :

$$\Delta_a = D_b \Leftrightarrow e^a = a(e^a - 1) \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1}.$$

b) $\Delta_a = D_b \Leftrightarrow e^a = a(e^a - 1) \Leftrightarrow a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1} \Leftrightarrow a \neq 0$ et $a = \varphi(a) \Leftrightarrow a = \alpha$

pour $a = \alpha$ , on a : $b = e^{-\alpha}$, donc $\Delta_\alpha = D_{e^{-\alpha}}$.

Donc $\Delta_\alpha$ est tangente aux courbes $C_f$ et $C_g$ respectivement aux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

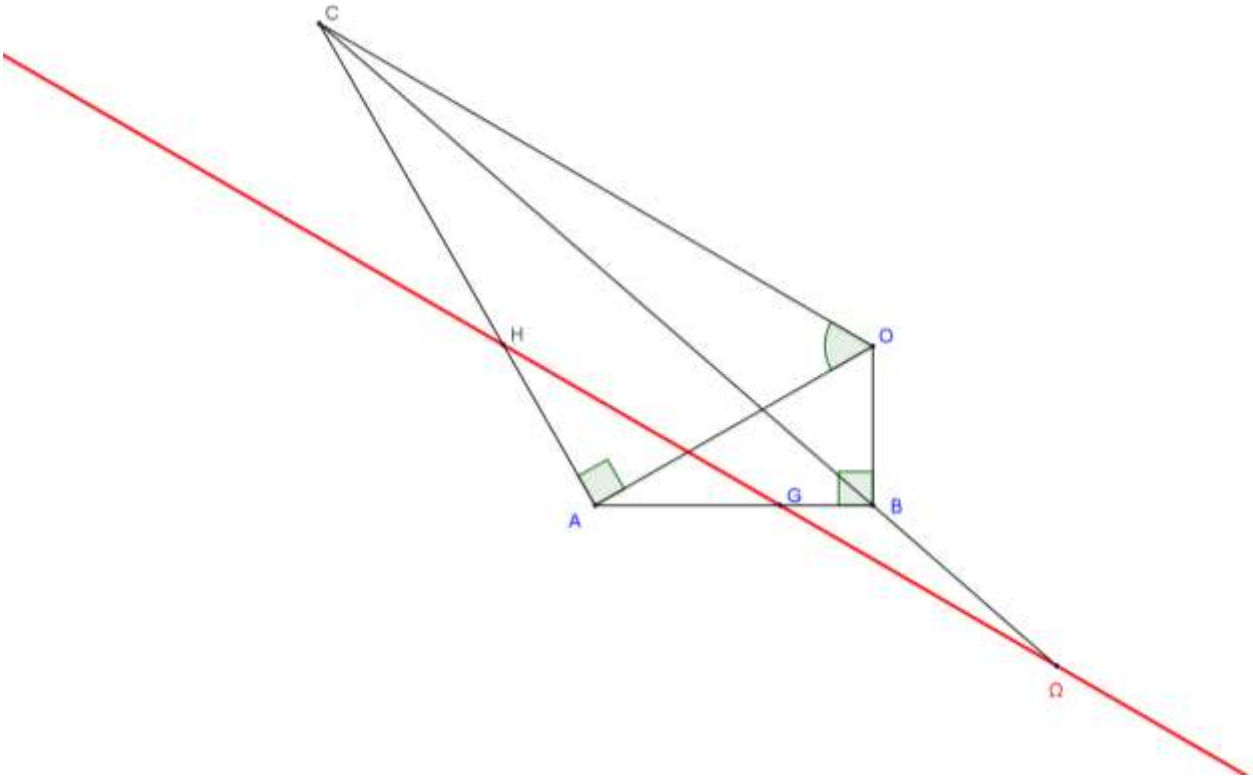
c) Comme l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution $\beta$ dans l'intervalle $]0,+\infty[$ alors $\Delta_\beta$ est tangente aux courbes $C_f$ et $C_g$ respectivement aux points $A(\beta, f(\beta))$ et $B(e^{-\beta}, g(e^{-\beta}))$.

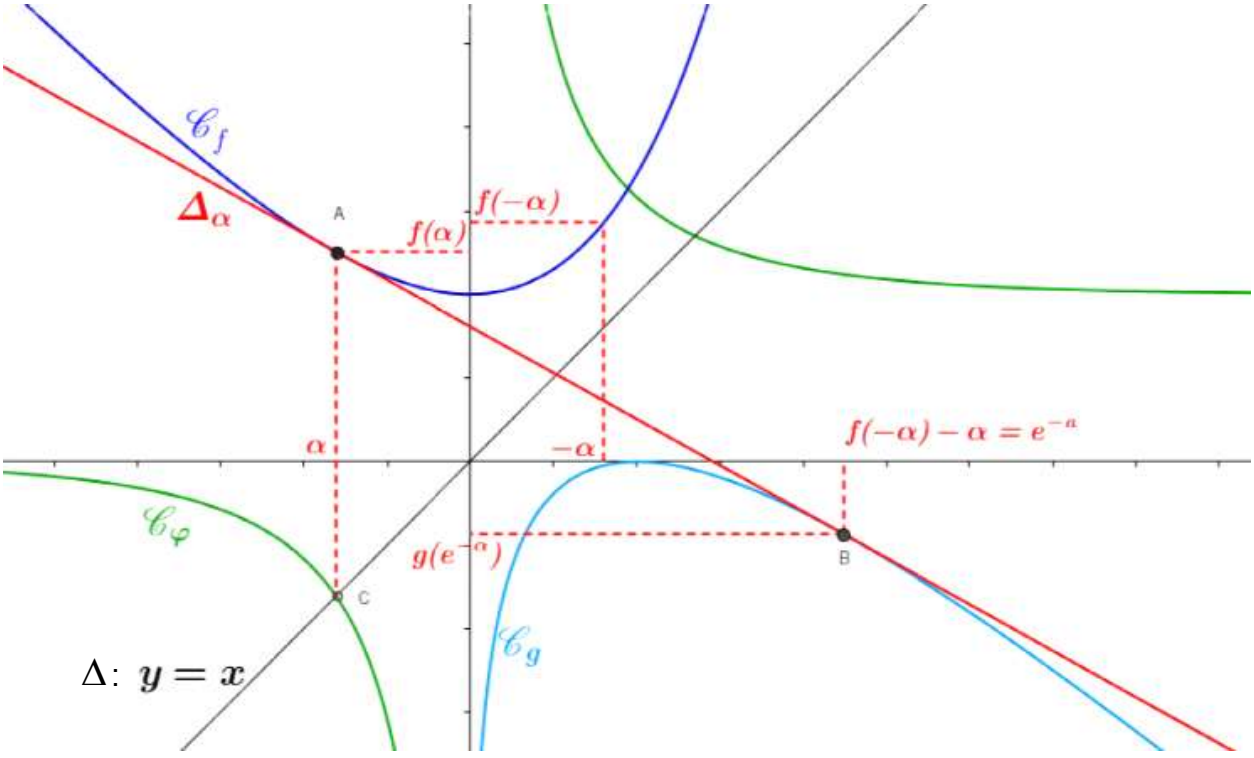
3) a) Voir figure à la page 8-8

b) $f(-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha} - (-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha}$. Voir figure à la page 8-8

c) Voir figure à la page 8-8

## Figure de l'exercice 2




## Figure de l'exercice 5