| | |
|---|---|
| EXAMEN DU BACCALAUREAT | Epreuve : MATHEMATIQUES |
| SESSION DE JUIN 2013 | Durée :3H ****** Coefficient : 3 |
| Section : **: Sciences Techniques** | SESSION PRINCIPALE |
| Corrigé proposé par : FARID ABIDI ****** Lycée Ibn Khladoun à RADES | |

## Exercice 1 :

I- 1) **c** 2) **a**

II- 1) **c** 2) **a**

## Exercice 2 :

**1) a)** $(P)\perp\Delta$ donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ directeur de $\Delta$ est un vecteur normal à P d'où $P: 2x+y+2z+d=0$

Comme $A(4,2,2)\in(P)$ donc $2\times4+2+2\times2+d=0\Leftrightarrow14+d=0\Leftrightarrow d=-14$ ainsi $(P): 2x+y+2z-14=0$

**b)** $B(5,-2,3)$ donc $2\times5+(-2)+2\times3-14=10-2+6-14=8-8=0$ d'où $B\in(P)$

$C(1,1,1)$ donc $2\times1+1+2\times1-14=2+1+2-14=-9\neq0$ d'où $C\notin(P)$

**c)** $\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $C(1,1,1)$ donc $\begin{cases}1=1+2\alpha\\1=1+\alpha\\1=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\alpha=0\\\alpha=0\end{cases}$ d'où $C\in\Delta$

$\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $A(4,2,2)$ donc $\begin{cases}4=1+2\alpha\\2=1+\alpha\\2=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\\\alpha=1\\\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$ ce qui est impossible d'où $A\notin\Delta$

**2) a)** $D(3,2,3)$ Pour montrer que D est le projeté orthogonal de C sur (P) il suffit de démontrer que $D\in\Delta$ et $D\in(P)$

$\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $D(3,2,3)$ donc $\begin{cases}3=1+2\alpha\\2=1+\alpha\\3=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\alpha=1\\\alpha=1\end{cases}$ ainsi $D\in\Delta$

$D(3,2,3)$ donc $2\times3+2+2\times3-14=6+2+6-14=14-14=0$ d'où $D\in(P)$

Donc $\Delta\perp$ **(**P ) en D et comme $C\in\Delta$ donc D est projeté orthogonal de C sur (P).

**b)** A, B et D étant des points de (P) et $C\notin(P)$ donc les points A, B , C et D ne sont pas coplanaires.

**c)** V est le volume du tétraèdre ABCD **.** Comme D est le projeté orthogonal de C sur (P) donc CD est la hauteur issue de C donc $V=\frac{1}{3}\text{Aire}_{ABD}\times CD$ or $\text{Aire}_{ABD}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ D'où $V=\frac{1}{6}\sqrt{16+4+16}\times\sqrt{4+1+4}=\frac{1}{6}\times6\times3=3$

**3) a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-1\times1+(-4)\times0+1\times1=-1+1=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ainsi A est le projeté orthogonal de D sur (AB) la distance de D à la droite (AB) est d = DA .

**b)** $\frac{AB\times d\times CD}{6}=\frac{AB\times AD\times CD}{6}=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}\times3}{6}=3=V$

## Exercice 3 :

**1) a)** $(2+2i)^2 = 4-4+8i = 8i$

**b)** $z^2 - 2(1+i)z - 6i = 0$

Le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta' = (1+i)^2 + 6i = 2i + 6i = 8i = (2+2i)^2$

Les solutions de l'équation sont $z_1 = \dfrac{1+i+2+2i}{1} = 3+3i$ et $z_2 = \dfrac{1+i-(2+2i)}{1} = -1-i$

**2) a)** $z_C - z_A = (1-2\sqrt{3}) + (1+2\sqrt{3})i - (3+3i) = (-2-2\sqrt{3}) + (-2+2\sqrt{3})i$

$\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B - z_A) = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4-4i) = -2-2i+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3} = (-2-2\sqrt{3}) + i(-2-2\sqrt{3})$

D'où $z_C - z_A = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B - z_A)$

**b)** $\left|\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$

Soit $\theta$ un argument de $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ ainsi $\arg\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ , où k est un entier relatif.

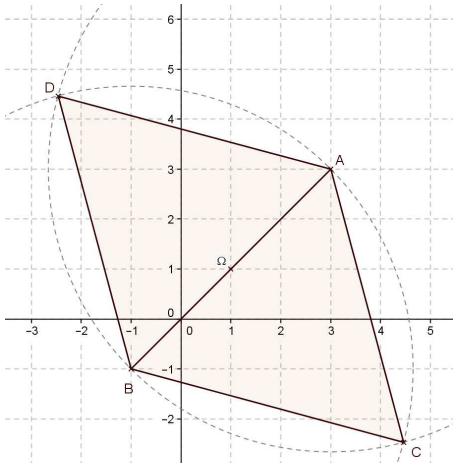
**c)** $z_C - z_A = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B - z_A) \Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| \Leftrightarrow \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$

Ainsi $\dfrac{AC}{AB} = 1$ donc $AB = AC$ d'où ABC est isocèle en A.

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où le triangle ABC est isocèle en A et par suite , ABC est un triangle équilatéral .

**3) a)** l'affixe du milieu de [AB] est $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3+3i-1-i}{2} = 1+i = z_\Omega$ d'où $\Omega$ est le milieu de [AB].

**b)**




**c)** $\Omega$ est le milieu de [AB] et D le symétrique de C par rapport à $\Omega$

Donc [AB] et [CD] ont même milieu donc ACBD est un parallélogramme et comme ABC est équilatéral donc CA = CD d'où le parallélogramme ACBD est un losange.

d) L'aire de ACBD = 2 x aire de ABC = $2 \times \dfrac{1}{2} AB^2 \times \sin\dfrac{\pi}{3} = 2 \times \dfrac{1}{2} \times 32 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

**Exercice 4 :**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}$

**1) a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)}{x}e^{-\frac{1}{2}x}=+\infty$ D'où la courbe (C) de f admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(e^x)^{\frac{1}{2}}}+2e^{-\frac{1}{2}x}=0$ d'où la droite d'équation y = 0 est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$

**2)** $f(x)=0\Leftrightarrow(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-2$

donc $\{E\}=(C)\cap(O,\vec{i})$ avec $E(-2,0)$

f(0) = 2 donc $\{F\}=(C)\cap(O,\vec{j})$ avec $F(0,2)$

**3) a)** La fonction f est définie et dérivable sur IR.

Pour tout $x\in$ IR, $f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+(x+2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}=\left(1-\frac{1}{2}x-1\right)e^{-\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow x=0.$ Le signe de $f'(x)$ et celui de $\left(-\frac{1}{2}x\right)$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | 0 |

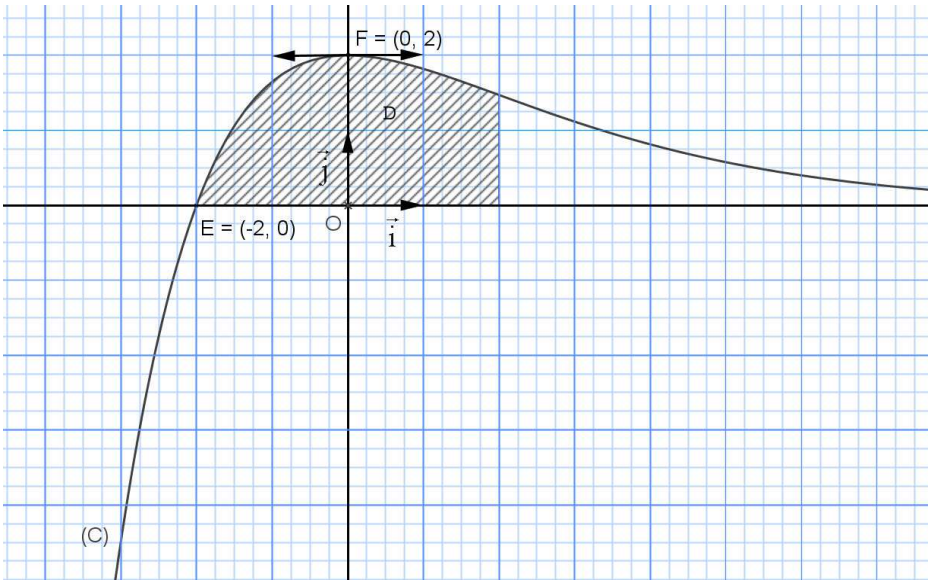
**b)** La fonction f ' est dérivable sur IR.

Pour tout $x\in$ IR, $f''(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$. $f''(x)=0\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x\right)=0\Leftrightarrow x=2$

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f "(x) | | + | 0 | − | |

Donc le point $K(2,f(2))$ avec $f(2)=4e^{-1}=\dfrac{4}{e}$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

**c)**




**4) a)** $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} + e^{2} = e^{2} - \frac{1}{e^{2}}$

**b)** $I_{n+1} = \int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\,dt$

On pose $\begin{cases} u(x) = (t+2)^{n+1} \\ v'(x) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = (n+1)(t+2)^{n} \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$

d'après le formule d'intégration par parties :

$$I_{n+1} = \int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\,dt = \left[-(t+2)^{n+1} e^{-t}\right]_{-2}^{2} + (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\,dt$$

$$I_{n+1} = -4^{n+1} e^{-2} + (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\,dt = (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\,dt - \frac{4^{n+1}}{e^{2}} = (n+1) I_n - \frac{4^{n+1}}{e^{2}}$$

**c)** $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{4^{n+1}}{e^{2}}$ donc $I_1 = I_0 - \frac{4}{e^{2}} = e^{2} - \frac{1}{e^{2}} - \frac{4}{e^{2}} = e^{2} - \frac{5}{e^{2}}$

$$I_2 = 2I_1 - \frac{4^2}{e^{2}} = 2\left(e^{2} - \frac{5}{e^{2}}\right) - \frac{16}{e^{2}} = 2e^{2} - \frac{10}{e^{2}} - \frac{16}{e^{2}} = 2e^{2} - \frac{26}{e^{2}}$$

**5) a)** voir graphique ci-dessus.

**b)** $\mathcal{V} = \pi \int_{-2}^{2} \left(f(t)\right)^{2}\,dt = \pi \int_{-2}^{2} (t+2)^{2} e^{-t}\,dt = \pi\, I_2 = 2\pi e^{2} - \frac{26}{e^{2}}$