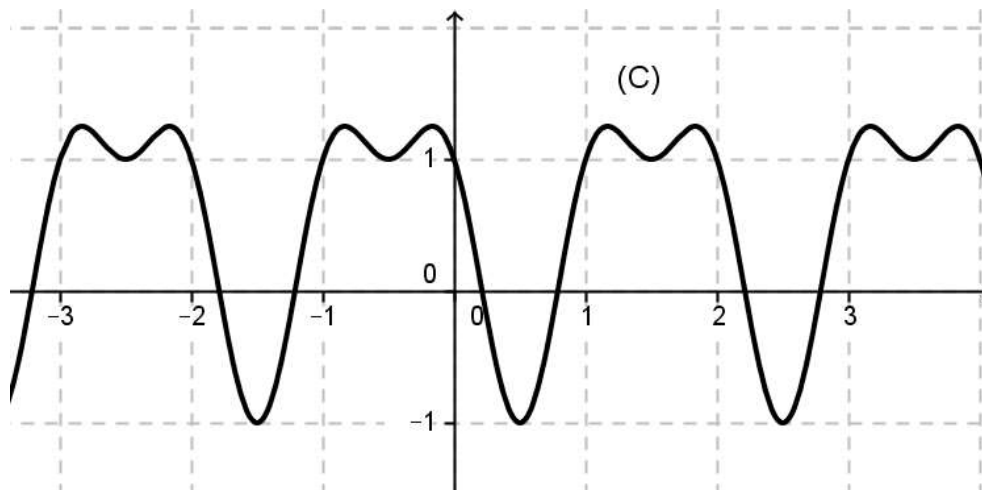


Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 – (3 points).



Ci-dessus est tracée la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé du plan. On donne $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier votre réponse.

1. f est périodique de période :
a) 1. ; b) 2 ; c) 3.
2. $f\left(\frac{2013}{2}\right)$ est égal à :
a) -1 ; b) 0 ; c) 1
3. Le nombre de solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle $[3, 5]$ est :
a) 4 ; b) 3 ; c) 2

Exercice 2 – (4 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. Montrer par récurrence que , pour tout entier naturel n , on a : $0 < U_n < 1$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$.
b) Dédire que la suite (U_n) est croissante.

3. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{2U_n}$.

- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 3– (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4x} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe (C) .
- Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.
- Tracer (D) et (C) .

Exercice 4 - (4 points)

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

Partie A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U .

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « les deux boules tirées portent le même numéro »

F : « le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées est 10 ».

Partie B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V . On compte la somme S des numéros portés par les boules tirées.

- Donner les cinq valeurs possibles de S .
- Vérifier que la probabilité d'avoir $(S = 3)$ est égale à $\frac{29}{64}$.
- Déterminer la probabilité de chacune des quatre autres valeurs de S .

Exercice 5 - (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(-2, 2, 2)$.

1. a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$;
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z + 2 = 0$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre OABC.
3. Soit P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
Montrer que P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (D) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
4. Soit (Γ_t) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2(1 - 3t)y - 2tz + 10t^2 - 6t - 4 = 0.$$
 - a) Montrer que pour tout t réel, (Γ_t) est une sphère de rayon 3 et de centre I_t situé sur la droite (D).
 - b) Montrer qu'il existe deux sphères (Γ_{t_1}) et (Γ_{t_2}) tangentes au plan (ABC).
 - c) Donner les coordonnées des points J_1 et J_2 d'intersection du plan (ABC) et des sphères respectivement (Γ_{t_1}) et (Γ_{t_2}) .

Corrigé**Exercice 1**1. **b**

En effet :

d'après le graphique, on remarque que la courbe de f sur les intervalles $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, 3]$ est la même donc f est périodique de période 2.

2. **a**

En effet :

$$f\left(\frac{2013}{2}\right) = f\left(\frac{2 \times 1006 + 1}{2}\right) = f\left(1006 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

3. **c**

En effet :

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe la courbe représentative de la restriction sur l'intervalle $[1, 3]$ en deux points donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle $[1, 3]$ deux solutions. Comme f est périodique de période 2 alors le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle $[1, 3]$ est 2.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. On a : $U_0 = \frac{1}{3}$ donc $0 < U_0 < 1$.

On suppose que, $0 < U_n < 1$ pour un certain entier naturel n , et on montre que $0 < U_{n+1} < 1$.

- $U_n > 0$ donc $3U_n > 0$ et $1+2U_n > 0$ d'où $U_{n+1} > 0$;
- $U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n}{1+2U_n} - 1 = \frac{U_n - 1}{1+2U_n}$ et comme $0 < U_n < 1$ alors $U_{n+1} < 1$.

Ainsi, $0 < U_{n+1} < 1$.

Par suite, pour tout entier naturel n , $0 < U_n < 1$.

Remarque :

On pose, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$, où $0 < x < 1$.

f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout x de $]0, 1[$, $f'(x) = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante

sur $]0, 1[$. Il en suit : $0 < U_n < 1 \Rightarrow f(0) < f(U_n) < f(1) \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$.

2. a) Pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{1+2U_n} - U_n = \frac{3U_n - U_n(1+2U_n)}{1+2U_n} = \frac{U_n(2-2U_n)}{1+2U_n} = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}.$$

b) On sait que pour tout entier naturel n , $U_n > 0$, $1 - U_n > 0$ et $1 + 2U_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

3. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{2U_n}$.

$$\text{a) Pour tout entier naturel } n, \quad V_{n+1} = \frac{1-U_{n+1}}{2U_{n+1}} = \frac{1-U_n}{\frac{1+2U_n}{6U_n}} = \frac{1-U_n}{6U_n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1-U_n}{2U_n} \right) = \frac{1}{3} V_n \text{ donc } (V_n) \text{ est}$$

une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Pour tout entier naturel n , $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$; or $V_0 = \frac{1-U_0}{2U_0} = 1$, il en résulte que pour tout entier naturel n , $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

D'autre part, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \frac{1-U_n}{2U_n} \Leftrightarrow 2U_n V_n = 1 - U_n \Leftrightarrow U_n(2V_n + 1) = 1 \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2V_n + 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}.$$

c) Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4x}, & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) = -(-x) + \sqrt{(-x)^2 - 4(-x)} = x + \sqrt{x^2 + 4x} = f(x)$;

Pour tout $x < 0$, $-x > 0$ et $f(-x) = -x + \sqrt{(-x)^2 + 4(-x)} = -x + \sqrt{x^2 - 4x} = f(x)$;

Donc f est paire d'où la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe (C) .

$$\begin{aligned}
 2. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{x^2 + 4x}{x\sqrt{x^2 + 4x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x}} = +\infty
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droite au point d'abscisse 0.

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$$

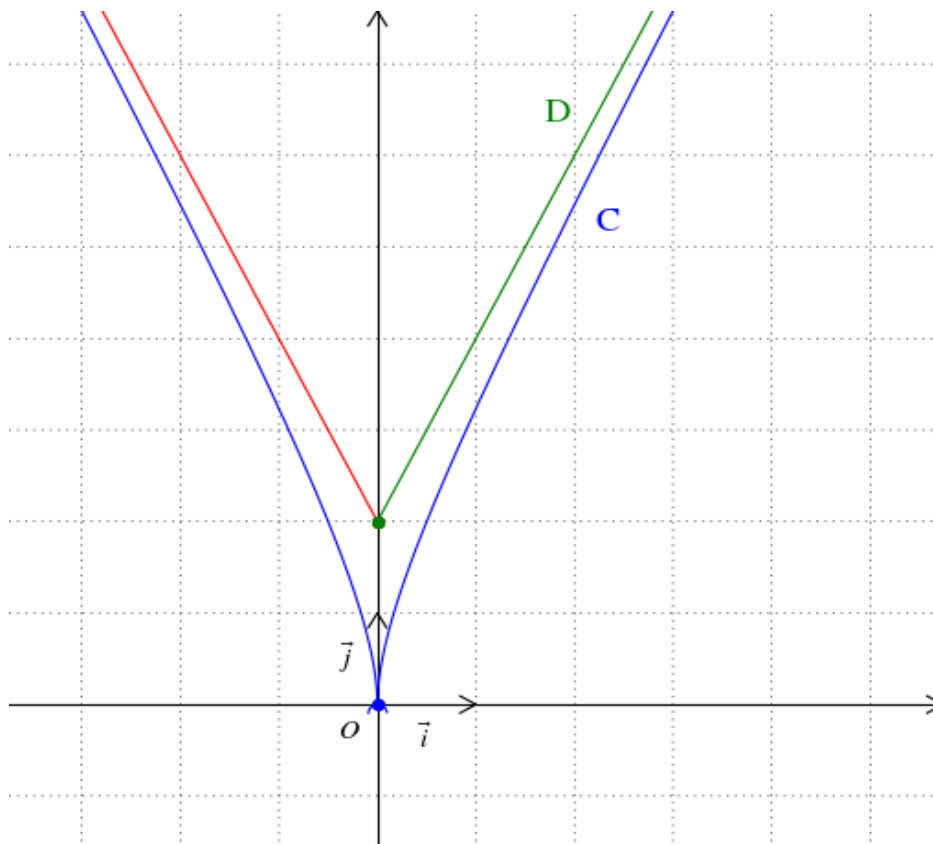
$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} = 0 \quad \text{donc la droite (D)}$$

d'équation $y = 2x + 2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

$$3. \text{ Pour tout } x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} > 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

4.



Exercice 4 -

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
 Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

Partie A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.

E : « les deux boules tirées portent le même numéro »

$$p(E) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28} \quad ; \quad p(F) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Partie B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V. On compte la somme S des numéros portés par les boules tirées.

1. Les cinq valeurs possibles de S sont : 2, 3, 4, 6 et 7. Voir tableau ci-dessous :

+	1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	2	2	3	3	3	3	3

2	3	3	3	4	4	4	4	4
2	3	3	3	4	4	4	4	4
2	3	3	3	4	4	4	4	4
5	6	6	6	7	7	7	7	7

$$2. \quad p(S=3) = \frac{29}{64}$$

$$3. \quad p(S=2) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16} \quad ; \quad p(S=4) = \frac{15}{64} \quad ; \quad p(S=6) = \frac{3}{64} \quad ; \quad p(S=7) = \frac{5}{64} \quad .$$

Exercice 5 -

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(-2, 2, 2)$.

$$1. \quad a) \text{ Calculer le produit vectoriel } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} ;$$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc (ABC) : $6x - 3y + 6z + d = 0$, où d est un réel.

$$\text{Or } A(-2, 0, 1) \in (ABC) \Leftrightarrow -12 + 0 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6.$$

Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z + 2 = 0$.

2. L'aire du triangle ABC est $A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{36+9+36} = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2}$ et le volume du tétraèdre

$$OABC \text{ est } \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6} |12+0+6| = 3.$$

3. Soit $P_1: x+y-3z+3=0$ et $P_2: x-2y+6z=0$.

$$\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-9z+3=0 \\ 3x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donc les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (D) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. Soit (Γ_t) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2(1-3t)y - 2tz + 10t^2 - 6t - 4 = 0.$$

a) Montrer que pour tout t réel,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2(1-3t)y - 2tz + 10t^2 - 6t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + [y+(1-3t)]^2 - (1-3t)^2 + (z-t)^2 - t^2 + 10t^2 - 6t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + [y+(1-3t)]^2 + (z-t)^2 - 4 - 1 + 6t - 9t^2 - t^2 + 10t^2 - 6t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + [y+(1-3t)]^2 + (z-t)^2 = 9$$

Donc (Γ_t) est une sphère de rayon 3 et de centre $I_t(-2, -1+3t, t)$ situé sur la droite (D).

b) (Γ_t) est tangente au plan (ABC)

$$\Leftrightarrow d(I_t, (ABC)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-4+1-3t+2t+2|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-t-1|}{3} = 3 \Leftrightarrow |t+1| = 9 \Leftrightarrow t = 8 \text{ ou } t = -10$$

Donc les sphères (Γ_8) et (Γ_{-10}) sont tangentes au plan (ABC).

c) Soit $\{J_1\} = \Gamma_8 \cap (ABC)$ et Δ_1 la perpendiculaire au plan (ABC) passant par $I_{-8}(-2, 23, 8)$,

on a : $\Delta_1 \cap (ABC) = \{J_1\}$.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC) donc } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta_1$$

$$\text{Donc } \Delta_1 : \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 23 - \alpha \\ z = 8 + 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ d'où } J_1(-2 + 2\alpha, 23 - \alpha, 8 + 2\alpha).$$

$$J_1(-2+2\alpha, 23-\alpha, 8+2\alpha) \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2+2\alpha) - (23-\alpha) + 2(8+2\alpha) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{9}$$

Par suite : $J_1\left(-\frac{2}{9}, \frac{199}{9}, \frac{56}{9}\right)$.

Soit $\{J_2\} = \Gamma_{-10} \cap (ABC)$ et Δ_2 la perpendiculaire au plan (ABC) passant par $I_{10}(-2, -31, -10)$, on a : $\Delta_2 \cap (ABC) = \{J_2\}$.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } (ABC) \text{ donc } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta_2$$

$$\text{Donc } \Delta_2 : \begin{cases} x = -2 + 2\beta \\ y = -31 - \beta \\ z = -10 + 2\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R} \text{ d'où } J_2(-2+2\beta, -31-\beta, -10+2\beta).$$

$$J_2(-2+2\beta, -31-\beta, -10+2\beta) \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2+2\beta) - (-31-\beta) + 2(-10+2\beta) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{10}{9}$$

Par suite : $J_2\left(-\frac{38}{9}, -\frac{269}{9}, -\frac{110}{9}\right)$.