Exercice 1 :

1. a) On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\vec{j} + 6\vec{k}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P = (ACH) et comme P passe par A alors une équation cartésienne de P est $36x - 36y + 36z = 0$ ou encore $x - y + z = 0$.

c) Un vecteur normal au plan Q = (EGB) est $\overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EG} \wedge \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$ donc P et Q sont parallèles.

Une équation du plan Q est $x - y + z + d = 0$ où d est un réel.

Or $B(6,0,0) \in Q \Leftrightarrow 6 - 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$ donc $Q : x - y + z - 6 = 0$

2. a) M(x, y, z) $\in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

Donc (S) est la sphère de centre I(1, -1, 1) et de rayon $\sqrt{3}$.

b) J est le projeté orthogonal de A sur (Q) $\Leftrightarrow \begin{cases} J \in Q \\ (AJ) \perp Q \end{cases}$ (1)

Un vecteur normal à Q est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Il en résulte : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_J - y_J + z_J - 6 = 0 \\ x_J = \alpha \\ y_J = -\alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R} \\ z_J = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ x_J = 2 \\ y_J = -2 \\ z_J = 2 \end{cases}$ donc J(2, -2, 2).

De plus : $A \in (S)$, $(2-1)^2 + (-2+1)^2 + (2-1)^2 = 3$ donc $J \in (S)$

et AJ = $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$.

Donc [AJ] est un diamètre de (S).

c) On a :

- ✓ (P) et (Q) sont deux plans parallèles
- ✓ $A \in (P)$, $J \in (Q)$ et $(AJ) \perp Q$
- ✓ [AJ] est un diamètre de (S)

Par suite , la sphère (S) est tangente à chacun des plans P et Q.

3. a) L'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ est :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 4 \\ z' = z + 2 \end{cases}.$$

A' = t(A) donc A'(2, 4, 2) et J'= t(J) donc J'4, 2, 4).

b) S' = t(S) est la sphère de centre I' = t(I) , I'(3, 3, 3) , et de rayon $\sqrt{3}$.

b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal aux plans (P) et (Q).

$\vec{U}.\vec{n} = 2 - 4 + 2 = 0$ donc $\vec{U}$ est un vecteur de P et de Q donc t(P) = P et t(Q) = Q.
S est tangente à P en A donc S' est tangente à P en A'.
S est tangente à Q en J donc S' est tangente à Q en J'.

Exercice 2 :

1. f est la similitude directe qui envoie A sur B et C sur D.

a) $\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{3BD} = \frac{1}{3}$ donc le rapport de f est $\frac{1}{3}$.

$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$.

b) O est le milieu de [AC] donc f(O) est le milieu de $f([AC]) = [BD]$ donc f(O) = O.

Comme le rapport de f est distinct de 1 alors le centre de f est O.

2. a) f(A) = B et f(D) = D' donc $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où **les droites (AD) et (BD') sont perpendiculaires.**

f(C) = D et f(D) = D' donc $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DD'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où les droites (CD) et (DD') sont perpendiculaires. Or (CD) et (AB) sont parallèles alors **(AB) et (DD') sont perpendiculaires.**

D'autre part :

$f \circ f$ est la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{1}{9}$ et d'angle π donc $f \circ f$ est l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{9}$

et $f \circ f(C) = f(D) = D'$

donc O, C et D' sont alignés d'où D' appartient à (OC) = (OA).
Comme (OC) est perpendiculaire à (BD) alors **(AD') et (BD) sont perpendiculaires.**
Donc D' est l'orthocentre du triangle ABD.

$f \circ f(C) = f(D) = D'$ donc $\overrightarrow{OD'} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}$ d'où OD' = $\frac{1}{9}OC = \frac{1}{9}OA$.

Par suite $OA = 9OD'$.

b) ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$

Comme f conserve le parallélisme alors l'image du parallélogramme ABCD est le parallélogramme f(A)f(B)f(C)f(D) = BB'DD'.

Comme f conserve l'orthogonalité alors $f\left((AC)\right) \perp f\left((BD)\right)$ donc $(BD) \perp (B'D')$.

Ainsi , BB'DD' est un losange.

3. a) $g = f \circ S_{(AC)}$ est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport 1 alors g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$.

b) $g(O) = f \circ S_{(AC)}(O) = f(O) = O$; $g(A) = f \circ S_{(AC)}(A) = f(A) = B$;

$g(B) = f \circ S_{(AC)}(B) = f(D) = D'$; $g(C) = f \circ S_{(AC)}(C) = f(C) = D$;

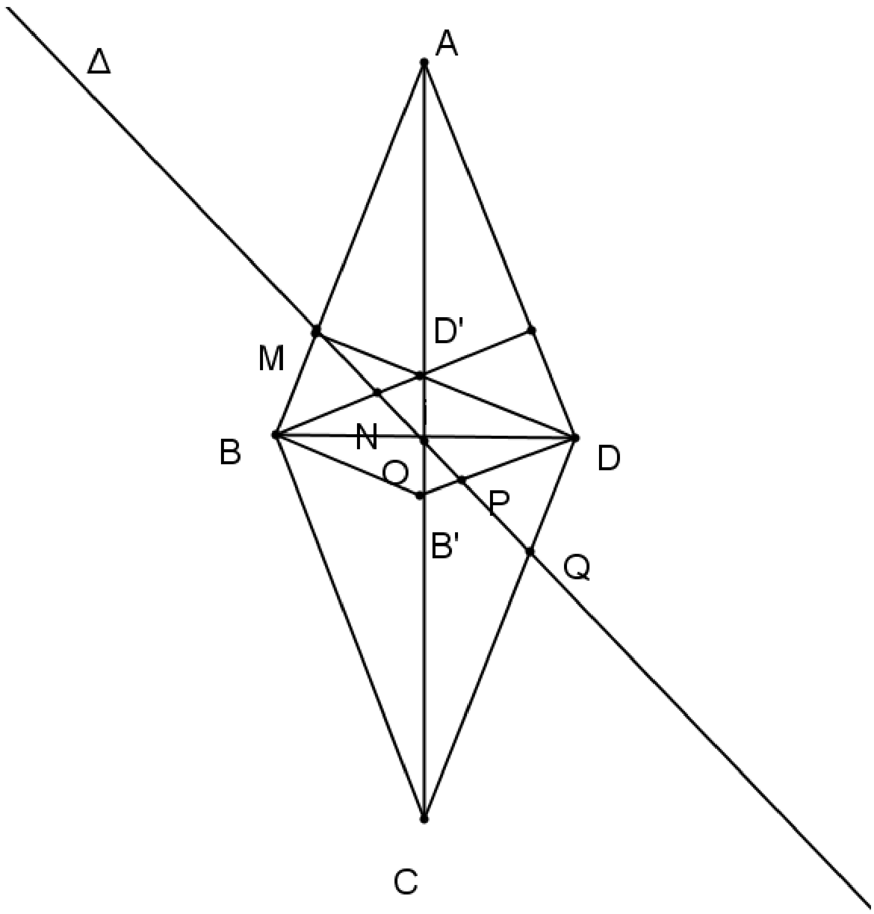
$g(D) = f \circ S_{(AC)}(D) = f(B) = B'$.

c) g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$, de centre O et g(A) = B donc l'axe Δ de g est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d) $\Delta \cap (AB) = \{M\}$ donc $\{g(M)\} = g(\Delta) \cap g\left((AB)\right) = \Delta \cap (BD') = \{N\}$ d'où g(M) = N.

$\Delta \cap (CD) = \{Q\}$ donc $\{g(Q)\} = g(\Delta) \cap g\left((CD)\right) = \Delta \cap (DB') = \{N\}$ d'où f(Q) = P.

Il en résulte : $NP = \frac{1}{3}MQ$ d'où $MQ = 3NP$.



Exercice 3 :

1. a) Comme $a \equiv 1(\bmod 10)$ pour tout $k \in \{1,2,3,\dots,9\}$, $a^k \equiv 1(\bmod 10)$.

D'où $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv \sum_{k=1}^{9} a^k + 1(\bmod 10) \equiv \sum_{k=1}^{10} 1(\bmod 10) \equiv 10(\bmod 10) \equiv 0(\bmod 10)$.

b) Comme $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$ alors

$a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0(\bmod 10)$ et $a - 1 \equiv 0(\bmod 10)$

donc $(a-1) = 10p$ et $(a^9 + a^8 + \dots + a + 1) = 10p'$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$

donc $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1) = 10^2 pp'$

donc $a^{10} \equiv 1(\bmod 10^2)$

2. a)

Le reste de b modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Le reste de b^4 modulo 10	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Donc les possibles de b^4 modulo 10 modulo 10 sont : 0, 1, 5 et 6.

b) Si b est premier avec 10 alors le reste de b modulo 10 est 1, 3 , 7 ou 9 donc $b^4 \equiv 1(\text{mod}10)$.

Inversement :

Si $b^4 \equiv 1(\text{mod}10)$ alors

$b \equiv 1(\text{mod}10)$ ou $b \equiv 3(\text{mod}10)$ ou $b \equiv 5(\text{mod}10)$ ou $b \equiv 7(\text{mod}10)$

Donc b est premier avec 10.

Ainsi : $b^4 \equiv 1(\text{mod}10) \Leftrightarrow$ b est premier avec 10.

3. a) b est premier avec 10 donc $b^4 \equiv 1(\text{mod}10)$ donc $\left(b^4\right)^{10} \equiv 1\left(\text{mod}10^2\right)$

d'où $b^{40} \equiv 1\left(\text{mod}10^2\right)$.

b) 67 est premier avec 10 donc $67^{40} \equiv 1\left(\text{mod}10^2\right)$. Or $67^2 = 4489$ donc $67^2 \equiv 89\left(\text{mod}10^2\right)$.

D'où $67^{42} \equiv 89\left(\text{mod}10^2\right)$.

Ainsi , les deux derniers chiffres de 67^{42} sont 8 et 9.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(1+\tan x)$.

1. a) Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x > -1$ donc $1+\tan x > 0$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)} 1+\tan x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1+\tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.

b) Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \left(1+\tan^2 x\right).\dfrac{1}{1+\tan x} = \dfrac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}$.

c) On a pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ d'où le tableau de variation de f :

x	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $-\infty$

2. a) On a : $f(0)=\ln(1+\tan 0)=\ln 1=0$ donc $O\in(C)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(1+\tan\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$ donc $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)\in(C)$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ln\left(1+\tan\frac{\pi}{8}\right)=\ln\left(1+\left(\sqrt{2}-1\right)\right)=\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$ donc $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)\in(C)$.

b) Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$

$=\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)=\ln 2-f(x)$.

c) $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-x<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

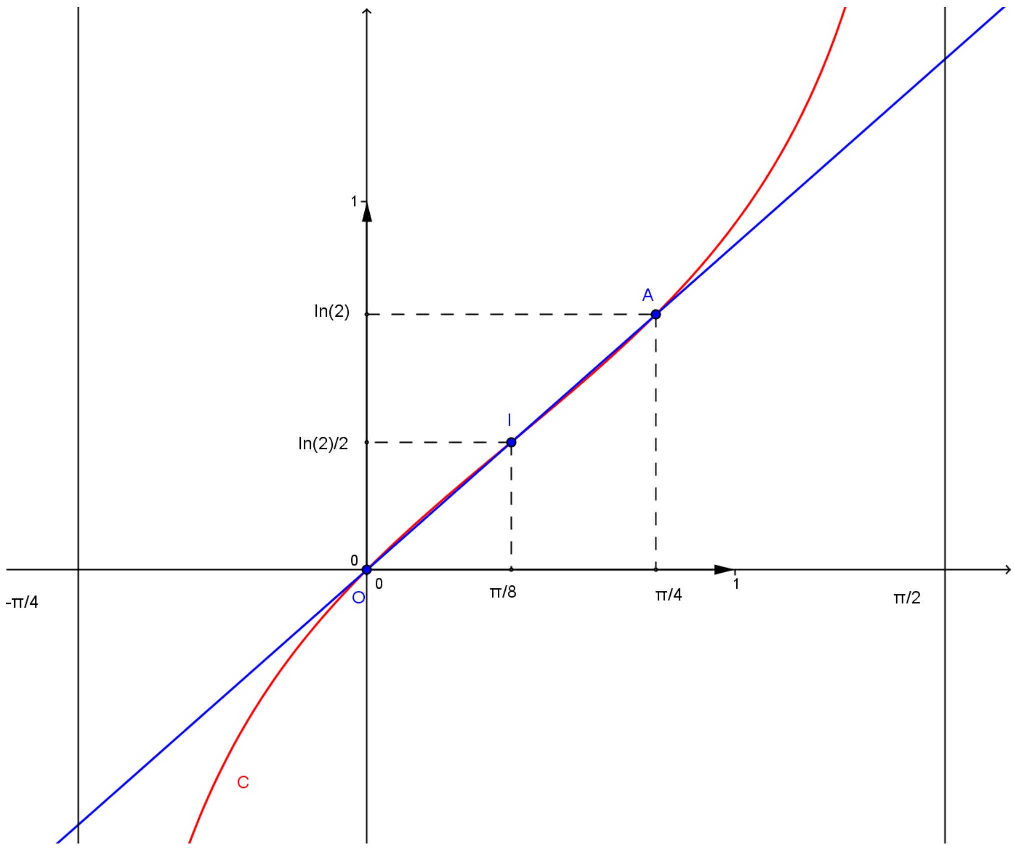
Ainsi : Si $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

D'autre part , $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)\Leftrightarrow f\left(2.\frac{\pi}{8}-x\right)=2\left(\frac{\ln 2}{2}\right)-f(x)$.

Il en résulte : Le point $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C).

3. On a : f(0) = 0 et $f'(0)=\frac{1+\tan^2 0}{1+\tan 0}=1$ donc une équation de la tangente à (C) au point O est y = x d'où la tangente à (C) en O est la droite (OA).

Les droites d'équations respectives $x=-\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{\pi}{2}$ sont asymptotes à (C).



4. a) On a :
   - ✓ La courbe (C) passe par les points O et A ;
   - ✓ I est le centre de symétrie de (C) ;
   - ✓ I est le milieu de [OA]

Donc Les parties (S_1) e (S_2) sont symétriques par rapport à I d'où (S_1) et (S_2) ont la même aire.

b) Comme f est continue et positive sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = $\frac{\pi}{4}$ est aussi l'aire de la partie du plan formé par le triangle OAH , où H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses, privé de la surface S_2 et union la surface S_1.

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx = \frac{1}{2}OH\times HA - \text{Aire}(S_2) + \text{Aire}(S_1) = \frac{1}{2}OH\times HA = \frac{\pi\ln 2}{8}$.

5. a) f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle J = $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

   b) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur J = $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\\ f(x)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\mathbb{R} \\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1+\tan x}{1+\tan^2 x}$$

Or $y=\ln(1+\tan x)\Leftrightarrow e^y=1+\tan x\Leftrightarrow \tan x=e^y-1$, il en suit :

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1+\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{e^y}{1+\left(e^y-1\right)^2}.$$

Ainsi , pour tout réel x, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}$.

b) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}dx=\int_0^{\ln 2}\left(f^{-1}\right)'(x)dx=\left[f^{-1}(x)\right]_0^{\ln 2}=f^{-1}(\ln 2)-f^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.