

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] , $OA = 2OI$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Déterminer h(O) et s(I).
- 2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit $O' = f(O)$. Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit $I' = f(I)$. Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'affixe z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point $M' = f(M)$. Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Exercice 2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$.

a) Vérifier que (O, \vec{j}) est un axe de symétrie de (Γ) .

b) Tracer (Γ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3) a) Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Vérifier que pour tout réel t de $[0, 2]$, le point $M(t, \sqrt{4-t^2})$ appartient à C .

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt$. Montrer que $I_1 = \pi$.

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4} dt$.

5) Soit \mathcal{A} l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E) .

Exprimer \mathcal{A} en fonction de I_1 et I_2 puis calculer \mathcal{A} .

Exercice 3 (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 1111x - 10^4y = 1$.

a) Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier.

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$

alors (p, q) est une solution de (E) .

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que
$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 4 (6points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

2) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de g .

3) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 3**), on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées $(e, g(e))$.

b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe C_g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = g(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

a) Donner la limite de (u_n) .

b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.



Section : N° d'inscription : Série :
Nom et prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des
surveillants
.....
.....

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)

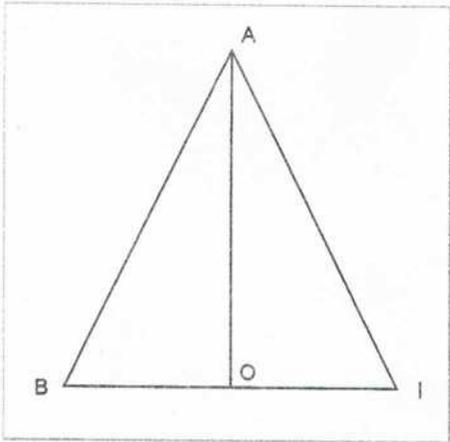


Figure 1

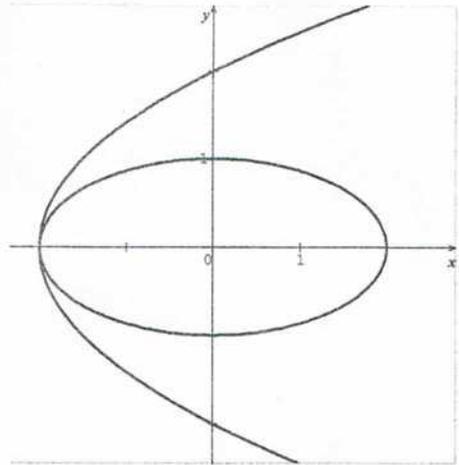


Figure 2

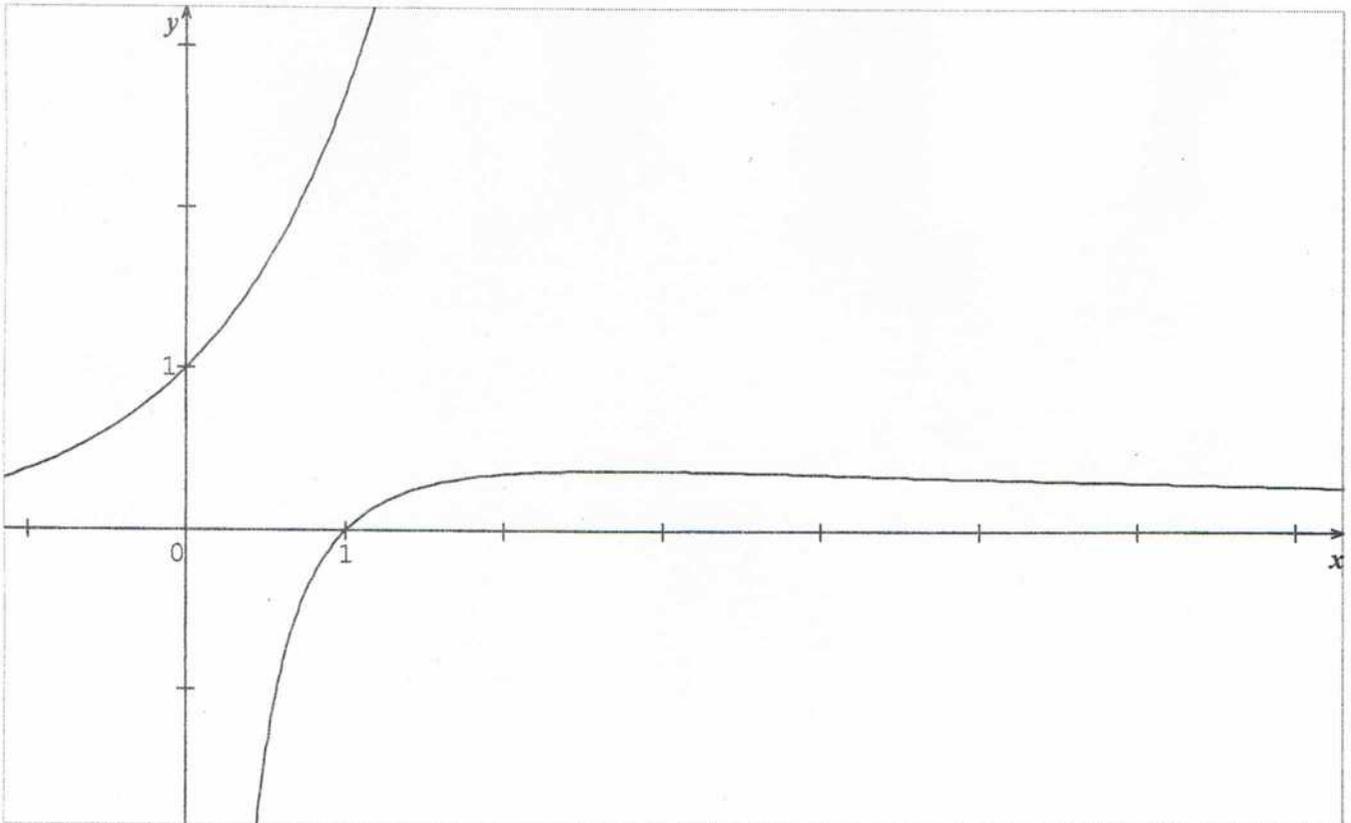


Figure 3