Exercice 1 : a) ; c) ; b)

Exercice 2 :

1. a) Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\tan^n x \geq 0$.

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \geq 0 \Leftrightarrow I_n \geq 0$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n+1} x - \tan^n x\right)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(\tan x - 1\right)dx$$

On sait que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$.

D'autre part, la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan\frac{\pi}{4}$ d'où $0 \leq \tan x \leq 1$ ou encore $-1 \leq \tan x - 1 \leq 0$.

Par conséquent, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan^n x\left(\tan x - 1\right) \leq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(\tan x - 1\right)dx \leq 0$

Il en résulte que la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante.

c) La suite $\left(I_n\right)$ est décroissante et minorée par 0 donc la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\left(1+\tan^2 x\right)dx$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

b) Soit ℓ la limite de la suite $\left(I_n\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n + I_{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n + \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\ell = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\left[\ln\left(\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right)$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x - 1\right)dx = \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

$I_2 + I_4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{3} - I_2 \Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow I_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Exercice 3 :

1.a) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 1 = 0$.

Son discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$. Donc une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$.

Les solutions de (E) sont donc : $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

b) $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c) Soit l'équation (E') : $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

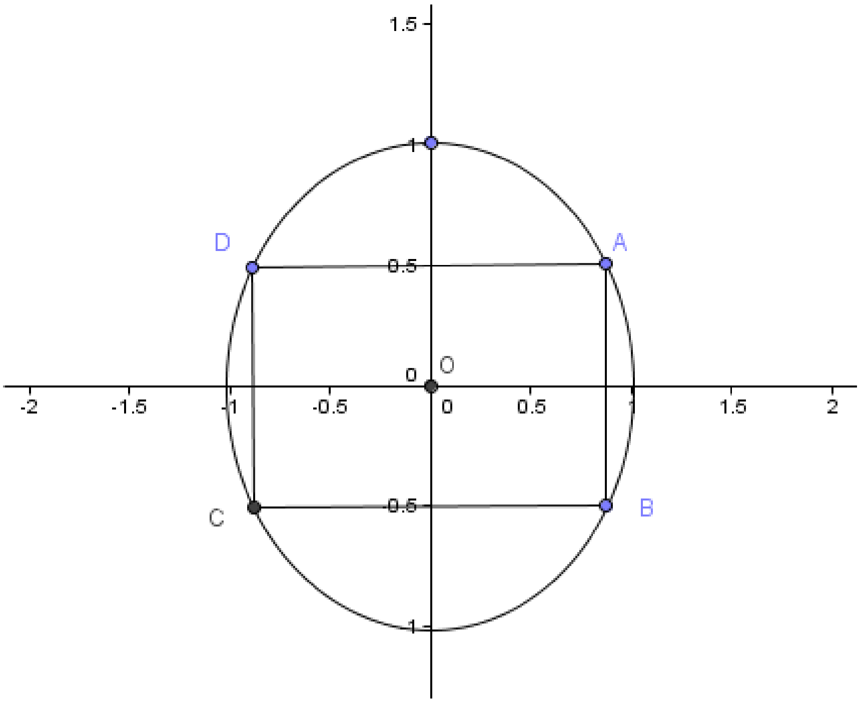
$$(E') \Leftrightarrow \begin{cases} Z = z^2 \\ Z^2 - Z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = z^2 \\ Z = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } Z = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } Z = -e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } Z = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } Z = -e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2) Comme pour tout nombre complexe z, $z^2 - z + 1 = (z - z')(z - z'') = \left(z - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ alors

$$\begin{aligned}
z^4 - z^2 + 1 &= \left(z^2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \left[z^2 - \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)z + e^{i\frac{\pi}{6}}.e^{-i\frac{\pi}{6}}\right].\left[z^2 + \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)z + e^{i\frac{\pi}{6}}.e^{-i\frac{\pi}{6}}\right] \\
&= \left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{6}\,z + 1\right)\left(z^2 + 2\cos\frac{\pi}{6}\,z + 1\right) \\
&= \left(z^2 - \sqrt{3}\,z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{3}\,z + 1\right)
\end{aligned}$$

4. a) $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_C = -e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_D = -e^{-i\frac{\pi}{6}}$



b) On a : A, B, C et D sont des points du cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) de centre O

et $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 0$ donc O est le milieu de chacun des segments [AC] et [BD].

Il en résulte que ABCD est un parallélogramme inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) donc ABCD est un rectangle.

Exercice 4

1.a) Par lecture graphique, la courbe (Γ) possède deux extrema respectivement en 0 et 1 et comme la courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives 0 et 1 alors (Γ) est la courbe représentative de f et **($\mathscr{C}$) est celle de sa fonction dérivée f'**.

b) Par lecture graphique : f(0) = 0, f'(0)= 0 et f'(1) =0 .

c) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{e}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On admet dans toute la suite de l'exercice que : pour tout x réel, f(x) = $\frac{e^x}{1+x+x^2}$.

a) Pour tout x réel , f'(x) = $\dfrac{e^x\left(1+x+x^2\right)-e^x(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\dfrac{e^x\left(x^2-x\right)}{\left(1+x+x^2\right)}$.

b) Pour tout x réel ,

$$f(x)-f'(x)=\frac{e^x}{1+x+x^2}-\frac{e^x\left(x^2-x\right)}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{e^x}{1+x+x^2}\left[1-\frac{x^2-x}{1+x+x^2}\right]=f(x).\frac{1+2x}{1+x+x^2}\ .$$

c) Pour avoir l'abscisse du point d'intersection des courbes ($\mathscr{C}$) et (Γ), il suffit de résoudre

f(x) = f'(x) $\Leftrightarrow f(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow f(x).\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ou $1+2x=0$

Or pour tout x réel , $e^x>0$ et $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ alors f(x) > 0.

Par conséquent, f(x) = f'(x) $\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

On calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{3\sqrt{e}}$.

Donc les coordonnées du point d'intersection des courbes ($\mathscr{C}$) et (Γ) sont $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\right)$.

d) On a : pour tout x $\geq -\dfrac{1}{2}$, $f(x)-f'(x)=f(x).\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$.

D'autre part :

- Pour tout x $\geq -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}\geq 0$
- pour tout x de $[0,+\infty[$, $f(x)\geq\dfrac{e}{3}$,
- pour tout x de $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$, $\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\leq f(x)\leq 1$.
- $\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\simeq 0{,}808$ et $\dfrac{e}{3}\simeq 0{,}906$

Donc , pour tout x $\geq -\dfrac{1}{2}$, $f(x)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ donc $f(x)-f'(x)=\dfrac{4}{3\sqrt{e}}.\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$.

3. a) $A(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{t}\left(f(x)-f'(x)\right)dx$ donc $A(t)\geq\int_{-\frac{1}{2}}^{t}\dfrac{4}{3\sqrt{e}}.\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}dx$

d'où $A(t)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\left[\ln\left(1+x+x^2\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{t}\Leftrightarrow A(t)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\left[\ln\left(1+t+t^2\right)-\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\right]$

Ainsi : $A(t)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(1+t+t^2\right)-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

b) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(1+t+t^2\right)-\frac{4}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{3}{4}\right)=+\infty$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)=+\infty$.

b) $A_\alpha=-\frac{1}{2}\int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\left(4-\alpha^2\right)\sqrt{4-\alpha^2}$.

c) L'aire de la partie du plan délimitée par les deux courbes C et C ' est $A_{-2}=\frac{8}{3}$.

Exercice 5 :

1. Pour tout x de [0, 1], $f_n'(x)=-e^{-x}-(2n+1)x^{2n}<0$.

x	0	1
$f_n'(x)$	-	
$f_n(x)$	1 ↘	$e^{-1}-1$

2. f $_n$ est continue et strictement décroissante sur [0, 1] donc f_n réalise une bijection de [0, 1] sur f_n([0, 1]) = [$e^{-1}-1$, 1].
   $e^{-1}-1$<0 donc l'équation f_n(x) = 0 admet une solution unique u_n dans]0, 1[.
3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0<x<1\Rightarrow x^{2n+1}<x^{2n}$ $\Rightarrow f_{n+1}(x)<f_n(x)$.
   b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\in]0,1[$ donc $f_n\left(u_{n+1}\right)<f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\Leftrightarrow f_n\left(u_{n+1}\right)<0$.
   c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n\in]0,1[$ et $f_n\left(u_{n+1}\right)<0\Leftrightarrow f_n\left(u_{n+1}\right)<f_n\left(u_n\right)$.
   Comme f_n^{-1} est strictement décroissante sur $[e^{-1}-1,1]$ alors $u_{n+1}>u_n$.
   Ainsi, la suite $\left(u_n\right)$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.
4. a) Pour tout $n\geq1$, $f_n\left(u_n\right)=0\Leftrightarrow e^{-u_n}-u_n{}^{2n+1}=0\Leftrightarrow e^{-u_n}=u_n{}^{2n+1}\Leftrightarrow -u_n=(2n+1)\ln\left(u_n\right)$
   $\Leftrightarrow \ln\left(u_n\right)=-\frac{u_n}{2n+1}$.
   b) Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(u_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{2n+1}.u_n\Leftrightarrow \ln(\ell)=0\Leftrightarrow \ell=1$.