Exercice1 :

1.**Vrai** ; 2.**Faux** ; 3.**Vrai** ; 4.**Faux** ; 5.**Vrai** ; 6.**Faux**

Exercice 2 :

1. $|z_B| = 2$ et $\arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit que :

$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

2. a) Voir figure ci jointe.

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Les points A, B et C appartiennent tous au cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2 donc OA = OB = OC.

D'autre part , $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u}$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $z_C - z_B = 2$ donc $\overrightarrow{BC} = 2\vec{u}$.

D'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ et par suite le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

IL en résulte : OACB est un losange.

3. a) $z_O = 0$ donc $z^3_O = 0$ donc $O \in (E)$,

$z_A = 2$ donc $z^3_A = 8$ donc $A \in (E)$,

$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $z_B{}^3 = 8e^{i2\pi} = 8$ donc $B \in (E)$.

b)

$M(z) \in [OB] \Leftrightarrow M = O$ ou $\left(\overrightarrow{OM}\right.$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, non nuls et de même sens$\left.\right)$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Donc z = 0 ou $3\arg(z) \equiv 2\pi[2\pi]$ d'où z^3 = 0 ou $\arg(z^3) \equiv 0[2\pi]$.

Il en résulte z^3 est un réel strictement positif ou nul et par conséquent M(z) $\in (E)$.

c) Pour tout nombre complexe z non nul et d'argument θ,

$z^3 > 0 \Leftrightarrow \arg(z^3) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\arg(z) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

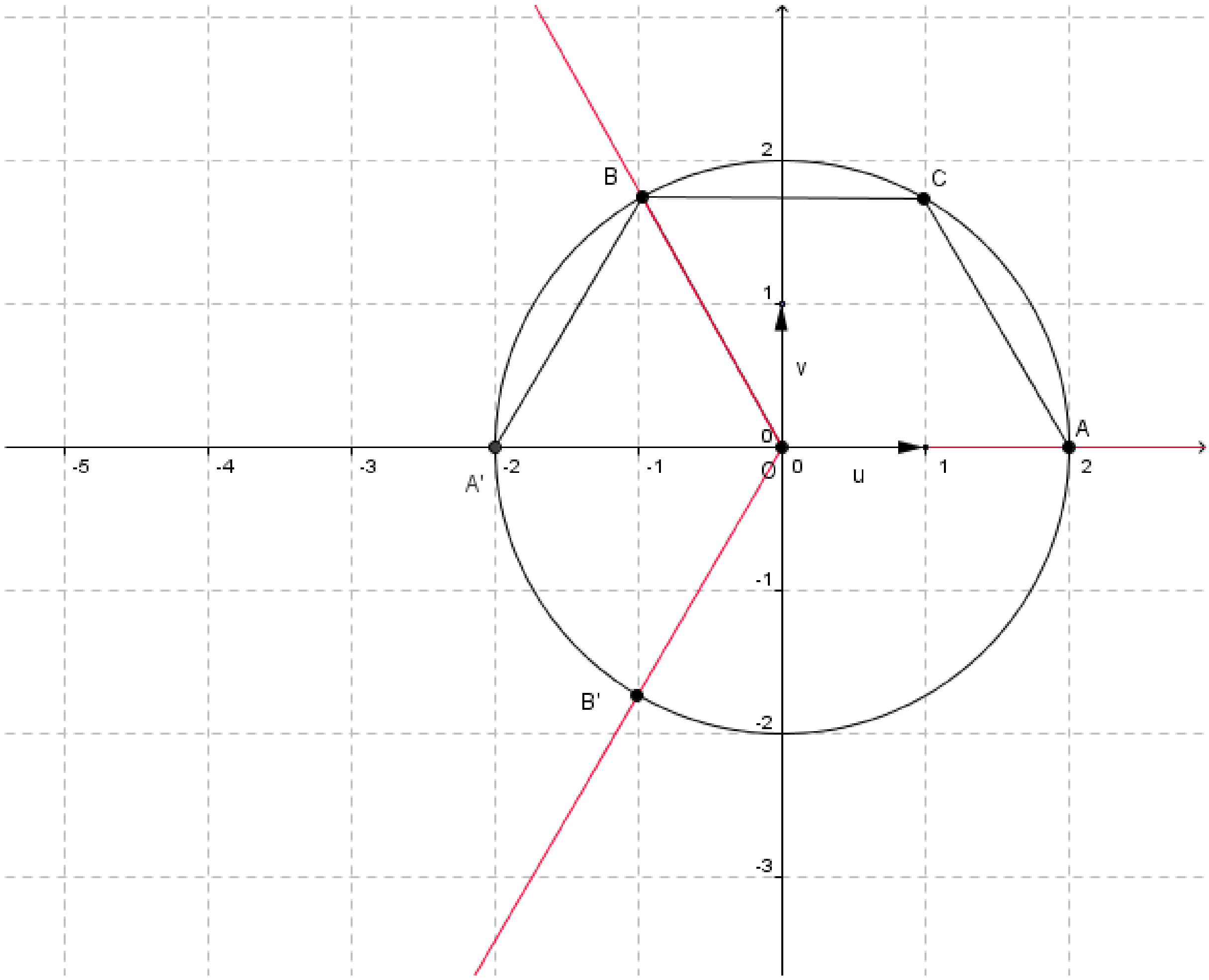
$\Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) M(z) $\in (E) \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^3 > 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow M = O$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O}$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv 0[2\pi]$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O}$ ou $\mathrm{M}\in[\mathrm{OA})$ ou $\mathrm{M}\in[\mathrm{OB})$ ou $\mathrm{M}\in[\mathrm{OB'})$, où B’ est le symétrique de B par rapport à l’axe réel $(O,\vec{u})$.



La figure à compléter sur la feuille à rendre avec la copie.

Exercice 3 :

1. a) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\wedge\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}12\\-6\\8\end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{EB}\wedge\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan (EBG)

donc (EBG) : $12x-6y+8z+d=0$ ou $d\in\mathbb{R}$.

Or B(2,0, 0) $\in (EBG)$ donc 24 + d = 0 ou encore d = -24.

Il en résulte que $(EBG): 12x - 6y + 8z - 24 = 0 \Leftrightarrow (EBG): 6x - 3y + 4z - 12 = 0$.

2. a) $M(2\alpha, 3\alpha, 4\alpha)$ et $\alpha \neq 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AG}$ et $M \neq G$.

b) Pour tout réel $\alpha \neq 1$, $6(2\alpha) - 3(4\alpha) + 4(3\alpha) - 12 = 12(\alpha - 1) \neq 0$

donc $M \notin (EBG)$.

3. a) On a : $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{EM}.(\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}) = 24\alpha - 24\alpha + 24\alpha - 24 = 24(\alpha - 1)$

D'où le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre MEBG est $\mathcal{V} = \dfrac{\left|\overrightarrow{EM}.(\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG})\right|}{6} = \dfrac{|24(\alpha - 1)|}{6} = 4|\alpha - 1|$.

b) On prend $\alpha = 0$, Le volume du tétraèdre AEBG est V = 4.

c) Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est $2 \times 3 \times 4 = 24$

$\mathcal{V}$ = 24 $\Leftrightarrow 4|\alpha - 1| = 24 \Leftrightarrow |\alpha - 1| = 6 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 6$ ou $\alpha - 1 = -6 \Leftrightarrow \alpha = -5$ ou $\alpha = 7$.

Exercice 4 :

1. a) (Γ) est la courbe de u et (C) est celle de v.

   b) On a : $u(0) - v(0) = 0$.

   Sur l'intervalle $]0,1[$, (Γ) est au dessous de (C) donc pour tout x de $]0,1[$, $u(x) - v(x) > 0$.

   Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, (Γ) est au dessus de (C) donc pour tout x de $]1,+\infty[$, $u(x) - v(x) < 0$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}x\ln x = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0,

   $f'(x) = -x^2 + \dfrac{3}{2}x - x\ln x - \dfrac{1}{2}x^2\dfrac{1}{x} = -x^2 + x - x\ln x = u(x) - v(x)$.

   Cette égalité reste vérifiée pour x = 0 puisque : $f'(0) = 0 = u(0) - v(0)$.

   On conclue : pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = u(x) - v(x)$.

b) L'aire A de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1 est :

$$A = \int_0^1 \left(u(x) - v(x)\right)dx = \int_0^1 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2 \ln x = -\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{5}{12}$	↘	$-\infty$

b) On a f(0) = 0 et f strictement croissante sur l'intervalle [0,1] donc 0 est l'unique solution de l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [0, 1].

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$,

$f\left(\left[1,+\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{5}{12}\right]$ et $0 \in \left]-\infty, \frac{5}{12}\right]$

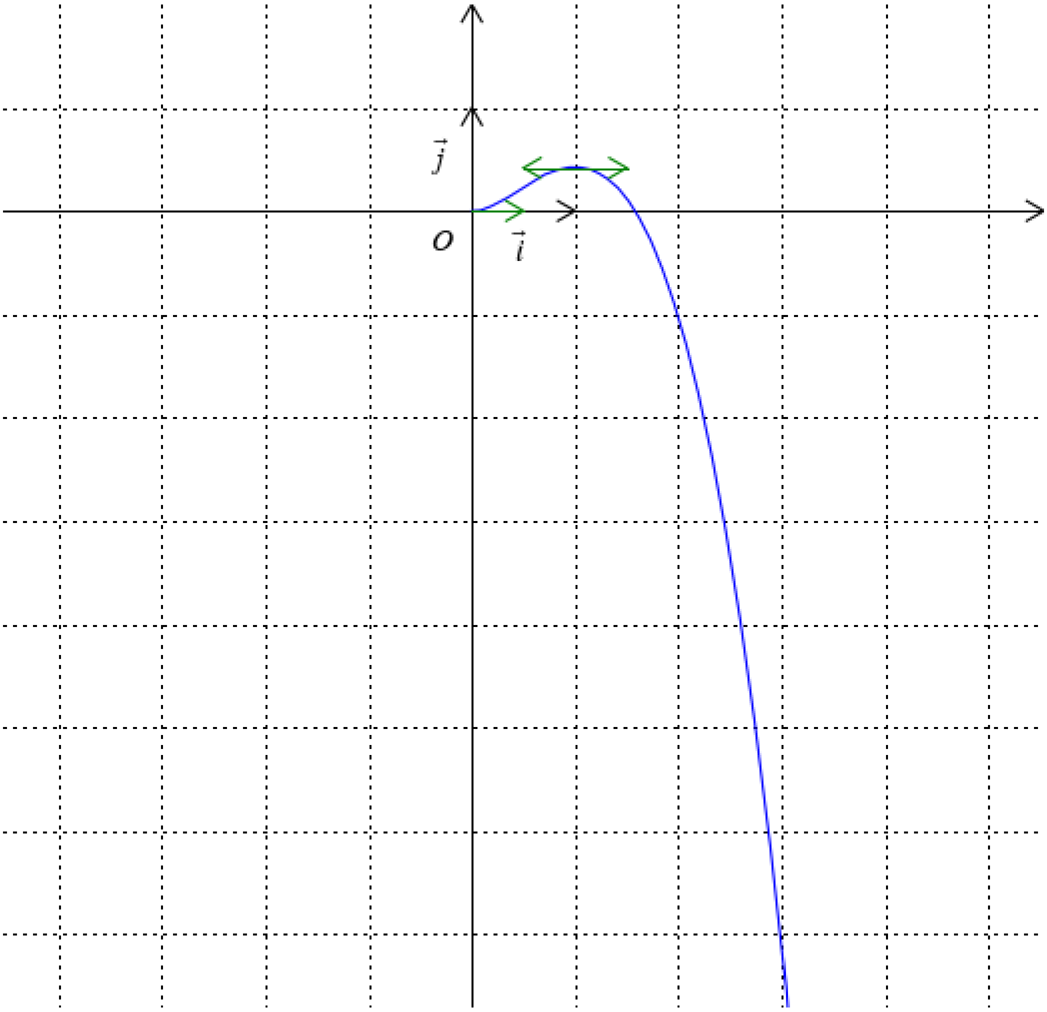
Donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$.

$f(1{,}5) \approx 0{,}1064$ et $f(1{,}6) \approx -0{,}0469$ donc $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}x\ln x = -\infty$ donc ($\mathscr{C}_f$) admet une branche parabolique

de direction $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

($\mathscr{C}_f$) admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0.



$\vec{j}$
O
$\vec{i}$