Exercice 1 :

1. b) ; 2.b) ; 3.b) ; 4. a)

Exercice 2 :

1.

Courbes	C_f	C_g	C_h
Solides	S_2	S_3	S_1

2. a) On a : $I=\int_{\frac{1}{e}}^{2} x\ln x\,dx$

Pour cela, on pose :

$u(x)=\ln x$ $\qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x$ $\qquad v(x)=\frac{1}{2}x^2$

On obtient :

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{2}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{2}x\,dx=2\ln 2-\frac{1}{2e^2}\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{2}=2\ln 2+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4}\left(4-\frac{1}{e^2}\right)$$

d'où $I=2\ln 2-1+\frac{3}{4e^2}$

b) Le volume engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe C_f est donné par la formule :

$$V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{2}f^2(x)dx=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{2}(1+x\ln x)dx=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{2}dx+\pi I=\pi\left(2\ln 2+1+\frac{3}{4e^2}-\frac{1}{e}\right).$$

Exercice 3 :

1. $p(2\le X\le 4)=e^{-0,2\times 2}-e^{-0,2\times 4}=e^{-0,4}-e^{-0,8}\approx 0,22$.
2. $p(X\ge 2)=e^{-0,2\times 2}=e^{-0,4}\approx 0,67$.
3. La probabilité que la durée de vie d'au moins une machine parmi les 4 dépasse 2 ans est $1-\left(1-e^{-0,4}\right)^4\approx 0,98$.

Exercice 4 :

1. a) $\vec{u}.\vec{v}=2-4+2=0$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$ donc les déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ est

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ -2 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 6\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}=81.$$

b) De :

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$ donc les droites (D) et (Δ) sont orthogonales
- ✓ $\det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont coplanaires

Il en résulte que les droites (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

c) $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (Q) conteant les droites (D) et (Δ) donc

$(Q): 6x+3y+6z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.

Or $A(-3,-1,-3)\in(Q)$ équivaut à -39 + d = 0 d'où d = 39.

Par suite, $(Q): 6x+3y+6z+39=0 \Leftrightarrow (Q): 2x+y+2z+13=0$.

2. a) la distance du point C au plan ($\mathscr{P}$) est $d(C,\mathscr{P})\ \dfrac{|-2+0-2+13|}{\sqrt{4+0+4}}=3<6$ donc ($\mathscr{P}$) et (S) sont sécants suivant un cercle ($\mathscr{C}$).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ($\mathscr{P}$) et A est un point de ($\mathscr{P}$) donc ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

b) On a : BC = 6 donc B $\in(S)$ et $\overrightarrow{BC}.\vec{v}=0$ donc (BC) $\perp$ D
d'où D est tangente à (S) en B.

3. a) $AB=\sqrt{6^2+3^2+6^2}=\sqrt{81}=9$ et $AC+BC=AB$ donc $C\in[AB]$.
b) On a : (AC) $\perp$ ($\mathscr{P}$) donc (AB) $\perp$ ($\mathscr{P}$) d'où (AB) $\perp\Delta$
Et $(BC)\perp D$ donc (AB) $\perp$ D
D'où (AB) est la perpendiculaire commune à (D) et (Δ).

Exercice 5 :

1. Remarquons que :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Comme $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}e^x=e^{-1}>0$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{2}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{2}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. a) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}e^x+\dfrac{x-1}{x+1}e^x=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$.

b) On a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty \; \Vert \; -\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. a) f est continue et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et $f(]-1,+\infty[)=\mathbb{R}$

donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]-1,+\infty[$.

$f(1{,}5)\approx-0{,}11$ et $f(1{,}6)\approx0{,}14$ donc $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

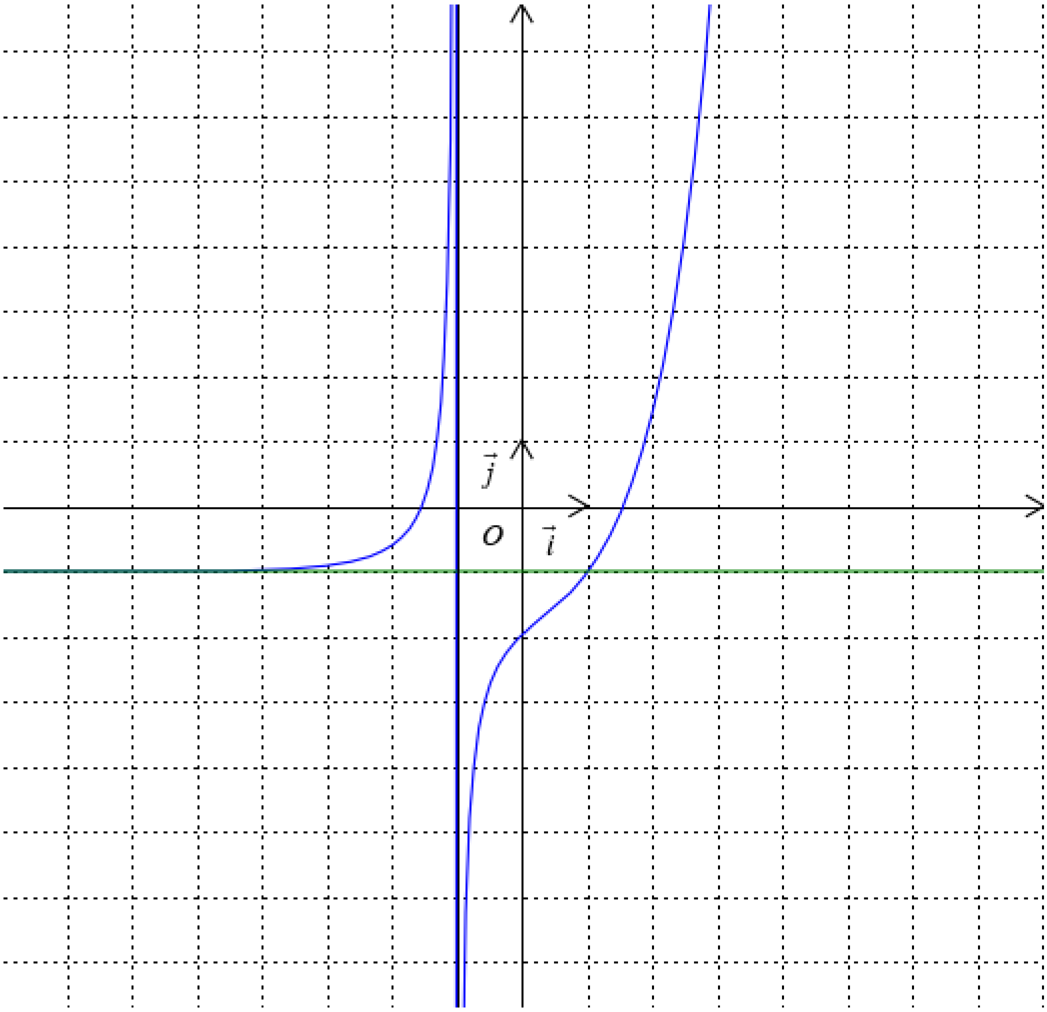
b) $f(\alpha)=0\Leftrightarrow-1+\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha=1\Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$

$f(-\alpha)=-1+\dfrac{-\alpha-1}{-\alpha+1}e^{-\alpha}=-1+\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\alpha}=-1+e^\alpha e^{-\alpha}=-1+1=0$.

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}+\left(2-\dfrac{1}{x+1}\right)\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc sa courbe représentative $(\mathscr{C})$

de f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

b) La droite d'équation x = -1 est asymptote à $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation y = -1 est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.


$\vec{j}$
O
$\vec{i}$