Exercice 1 :

1. c) ; 2.a) ; 3.c) ; 4. c)

Exercice 2 :

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \frac{1}{e^x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \frac{1}{e^x} = 0$ donc la droite $\Delta : y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout x positif, $f(x) - x = (x-1)e^{-x}$.

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc $(\mathscr{C})$ coupe (Δ) au point A(1, 1)

$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ donc $(\mathscr{C})$ est au dessus de (Δ) sur $]1,+\infty[$

$f(x) - x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ donc $(\mathscr{C})$ est au dessous de (Δ) sur $[0,1[$.

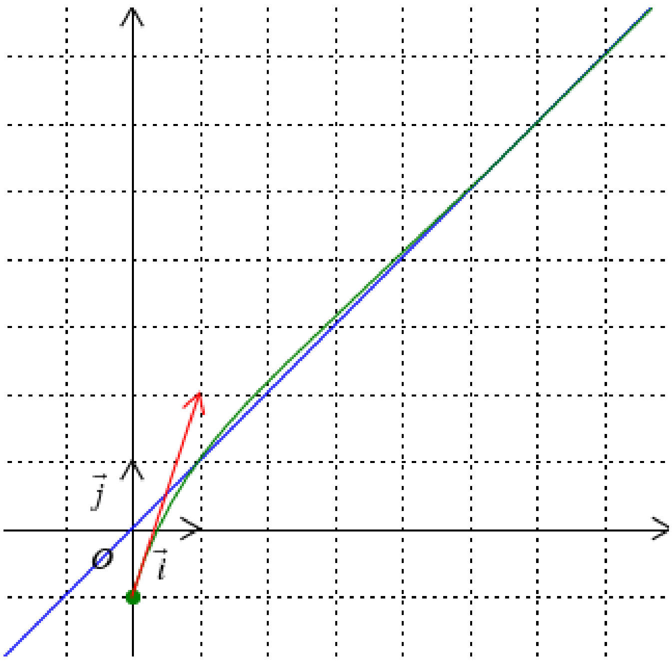
2. a) On a :

- ✓ f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$
- ✓ $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$
- ✓ $0 \in [-1,+\infty[$

Donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}19$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b)



3. a) On a : $u_1 = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{1} xdx + \int_{\alpha}^{1} (x-1)e^{-x}dx$

Or : $\int_{\alpha}^{1} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$

Calculons, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_{\alpha}^{1} (x-1)e^{-x}dx$:

Pour cela, on pose :

$v(x) = x-1$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

$w'(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $w(x) = -e^{-x}$

On obtient :

$$\int_{\alpha}^{1} (x-1)e^{-x}dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} e^{-x}dx = (\alpha-1)e^{-\alpha} + \left[-e^{-x}\right]_{\alpha}^{1} = -e^{-1} + \alpha e^{-\alpha}.$$

Il en résulte : $u_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \left(-e^{-1} + \alpha e^{-\alpha}\right) = \frac{1}{2} - e^{-1} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha e^{-\alpha}$

Soit $\mathscr{A}$ la partie du plan délimitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives x= α , x = 1 et y = 0,

$\mathscr{A} = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx\ ua = u_1 ua$ ou $\mathscr{A} = 4\int_{\alpha}^{1} f(x)dx\ cm^2 = 4u_1\ cm^2$

Donc $u_1 = \frac{1}{1\times ua} \times \mathscr{A}$ ou encore $u_1 = \frac{1}{4} \times \mathscr{A}\ cm^{-2}$.

b) Pour tout x positif, $-x \le 0$ donc $0 < e^{-x} \le 1$ d'où $0 < xe^{-x} \le x \Leftrightarrow 0 < f(x) \le x$

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, $0 < \left[f(x)\right]^n \le x^n$.

Il en suit : $0 \le \int_{\alpha}^{1} \left[f(x)\right]^n dx \le \int_{\alpha}^{1} x^n dx \Leftrightarrow 0 \le u_n \le \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{\alpha}^{1}$

$\Leftrightarrow 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\alpha^{n+1}$

Or $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\alpha^{n+1} < \frac{1}{n+1}$ donc $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$

c) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 3 :

1. Montrons par récurrence que : **pour tout entier naturel n** , $u_n \le v_n$.

On a : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ donc $u_0 \le v_0$.

On suppose que : $u_n \le v_n$, pour un certain rang n , et on montre que $u_{n+1} \le v_{n+1}$.

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{5(2u_n + v_n) - 3(3u_n + 2v_n)}{15} = \frac{u_n - v_n}{15} \le 0 .$$

D'où le résultat.

2. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} \ge 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

D'autre part , $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \le 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. On a :

- ✓ pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \le v_n$
- ✓ la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante
- ✓ pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{15}(v_n - u_n)$.

Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_n = v_n - u_n$, on donc $t_{n+1} = \frac{1}{15} t_n$

Ainsi : (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{15}$.

Et comme $\frac{1}{15} \in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, il en résulte ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite ℓ .

Remarque : la suite (u_n) est croissante , la suite (v_n) est décroissante et pour tout entier naturel n $u_n \le v_n$ donnent pour tout entier n, $0 = u_0 \le u_n \le v_n \le v_0 = 1$.

Ainsi :

- ✓ la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) est converge vers un réel ℓ .
- ✓ la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est converge vers un réel ℓ' .
- ✓ Pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ entraine, par passage à la limite,

$\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ d'où $\ell = \ell'$

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} - 9u_n - 5v_n = 2(2u_n + v_n) + 3u_n + 2v_n = 9u_n + 5v_n = w_n$$

donc la suite (w_n) est constante.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$.

Par suite, $5 = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 9u_n + 5v_n = 14\ell$ d'où $\ell = \dfrac{5}{14}$.

Exercice 4 :

1. a) On a :
   - ✓ ABC est un triangle rectangle en B et direct
   - ✓ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

   Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

   Il en résulte : $\dfrac{CB}{CA} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi : S(A) = B.

Autre méthode :

On a d'une part :

- ✓ ABC est un triangle rectangle en B et direct
- ✓ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

Comme O est le centre du rectangle ABCD alors OC = OB alors le triangle OBC est équilatéral direct.

D'autre part : la forme réduite de la similitude directe S de centre C , de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est $S = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{\left(C,\frac{1}{2}\right)}$.

O est milieu de [AC] donc $h_{\left(C,\frac{1}{2}\right)}(A) = O$ et le triangle OBC est équilatéral direct

donc $r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}(O) = B$. D'où $S(A) = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{\left(C,\frac{1}{2}\right)}(A) = B$.

b) On sait que AC= 2 AO , AE = 2 AD et AOD est un triangle équilatéral direct donc

AC = AE et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc le triangle ACE est équilatéral direct.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CO}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\frac{CO}{CE} = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{2}$ donc S(E) = O.

2. a)

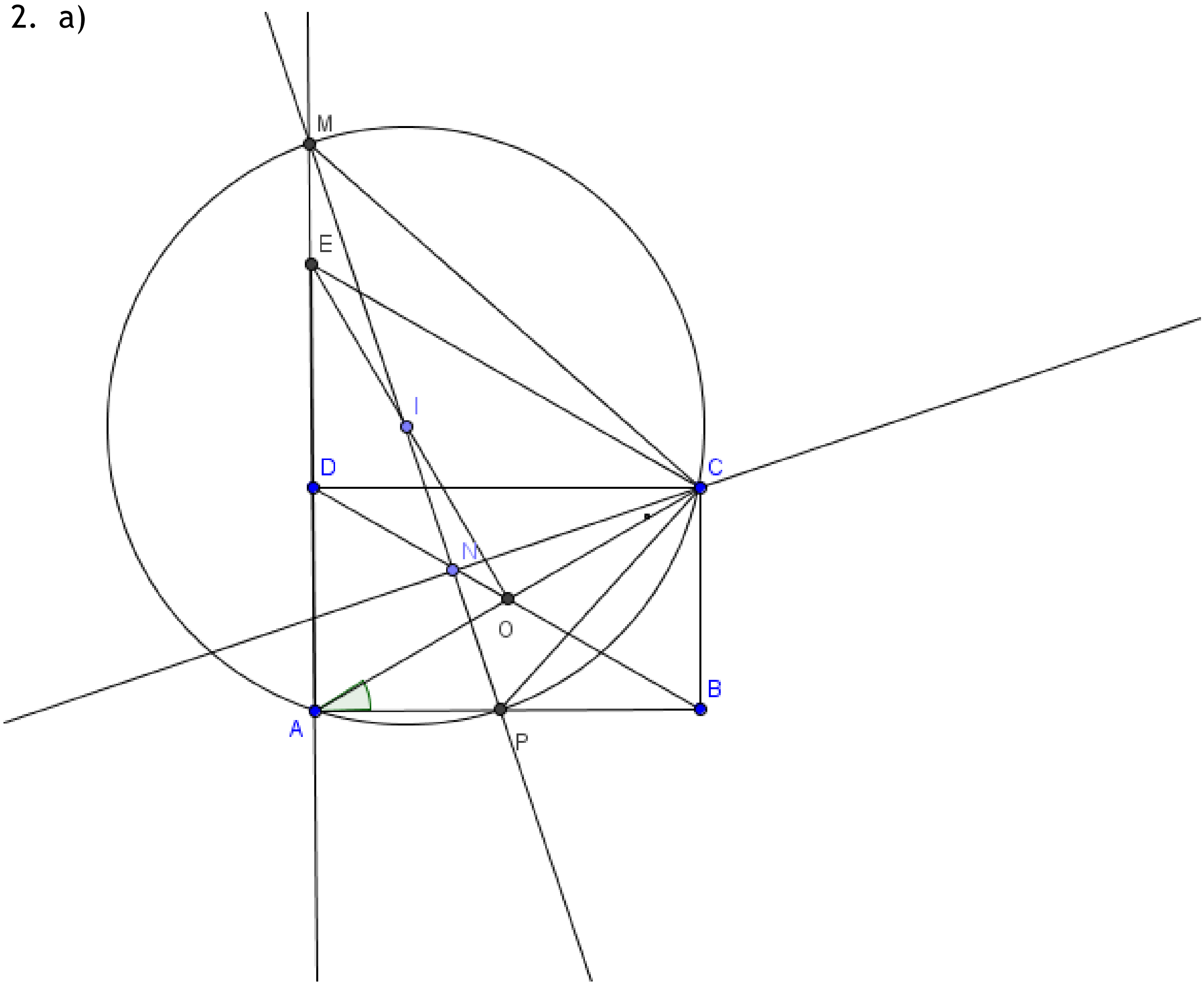


Figure à rendre en annexe

b) (OE) est la médiatrice du segment [AC] et I appartient à (OE) donc IA = IC. Comme A appartient à (Γ) alors C appartient aussi à (Γ).

3. a) A, P, C et M sont quatre point du cercle (Γ) tels que A et P sont situés sur le même arc orienté dans les sens direct d'extrémités M et C donc

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Or le triangle CMN est rectangle en N et direct donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

D'où $\frac{CN}{CM} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Par conséquent : S(M) = N.

4. $M \in (AE)$ donc $S(M) = N \in S((AE)) = (BO) = (BD)$ d'où les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 :

1. a) Comme $3\times 0 + 4\times(-2) = -8$ alors $(0,-2)$ est solution de l'équation (E).

b) On a $3x + 4y = -8 = 4.0 + 4.(-2)$ alors $3x + 4(y+2) = 0$ ou encore $3x = -4(y+2)$.

3 et 4 sont premiers entre eux et 4 divise 3x donc 4 divise x d'où $x = 4k, k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte que :

$3x = -4(y+2) \Leftrightarrow 3(4k) = -4(y+2) \Leftrightarrow y + 2 = -3k \Leftrightarrow y = -3k - 2$

Inversement : si $(x,y) = (4k,-3k-2)$ alors $3(4k) + 4(-3k-2) = -8$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est $\{(4k,-3k-2), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. a) Si M(x, y) $\in (\Delta)$ alors 3x + 4y + 8 = 0

Si de plus x et y sont entiers alors $x = 4k$ et $y = -3k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte que :

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{(4k)^2 + (-3k)^2} = \sqrt{25k^2} = 5|k|$$

D'où AM est un multiple de 5.

b) Si N(x, y) est un point de (Δ) alors 3x + 4y + 8 = 0 d'où $y + 2 = -\frac{3}{4}x$.

Il en suit :

$$AN = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{3}{4}x\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}x^2} = \frac{5}{4}|x|$$

c) Si AN est un multiple de 5 alors $\frac{5}{4}|x|$ est multiple de 5 d'où $|x|$ est multiple de 4 ou encore x = 4k , $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, x est entier.

x est entier et 3x + 4y = - 8 donc y est entier.