Systèmes

Activité 1 : Une usine de chocolats

1. Nombre de cartons de chocolats réalisés en une journée de travail

Dans une usine, on fabrique deux types de chocolats, des noirs et des blancs. La chaîne fabrique d'abord tous les chocolats noirs puis tous les chocolats blancs. Il faut sept minutes pour sortir un carton de chocolats noirs et neuf minutes pour un carton de chocolats blancs.

Une journée de production de cette usine dure 16 h. Dans cette partie, on recherche le nombre de cartons de chocolats noirs et le nombre de cartons de chocolats blancs que l'usine peut produire en exactement 16 h.

a. Si on fabrique six cartons de chocolats noirs, combien de cartons de chocolats blancs cette usine fabrique-t-elle en une journée de travail ?

b. Si on produit 46 cartons de chocolats blancs, combien de cartons de chocolats noirs cette usine fabrique-t-elle en une journée de travail ?

c. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

Cartons de chocolats noirs	6		33		51
Cartons de chocolats blancs		46		60	

d. On connaît le nombre de cartons de chocolats noirs produits sur une journée. On note x ce nombre et y le nombre de cartons de chocolats blancs. Exprime y en fonction de x.

e. Dans un tableur, reproduis la feuille de calcul ci-contre et programme la cellule B2 pour calculer y en fonction de x lorsque x varie de 1 à 100.

	A	B
1	x	y
2	1	
3	2	

f. Quelles sont les différentes possibilités de production pour une journée de travail ?

2. Nombre de cartons de chocolats fabriqués avec toutes les matières premières

L'usine doit utiliser entièrement les matières premières qu'elle achète pour fabriquer ses chocolats. Il faut 64 kg de matières premières pour fabriquer un carton de chocolats noirs et 56 kg pour les chocolats blancs. 7 384 kg de matières premières sont à utiliser par jour.

a. Avec exactement 7 384 kg de matières premières, détermine le nombre de cartons de chocolats blancs réalisables, si on fabrique 34 cartons de chocolats noirs.

b. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

Cartons de chocolats noirs	34	90			69
Cartons de chocolats blancs			109	69	

c. Exprime le nombre z de cartons de chocolats blancs produits en fonction du nombre x de cartons de chocolats noirs produits.

d. Dans la feuille de calcul du **1.**, ajoute une colonne pour calculer z en fonction de x.

e. Combien de cartons de chocolats noirs et de chocolats blancs peut-on fabriquer avec 7 384 kg de matières premières ? Cite toutes les possibilités.

3. On cherche le nombre de cartons de chocolats noirs et de chocolats blancs à produire en 16 h avec exactement 7 384 kg de matières premières.

a. Dans la feuille de calcul précédente, insère un graphique de type ligne pour représenter y et z en fonction de x.

b. Quelle(s) est (sont) la (les) solution(s) possible(s) de ce problème ?

Statistiques

Activité 2 : De manière approchée

1. Avec un graphique

On considère l'équation $6x + 3y = 10$ où x et y sont les deux inconnues.

On cherche des valeurs de x et de y qui vérifient cette égalité.

a. Si x vaut 1, quelle est la valeur de y qui vérifie l'égalité précédente ?
De la même façon, si y vaut 6, détermine x pour que l'égalité soit vraie.

b. Recopie et complète le tableau suivant de telle sorte que l'égalité soit vraie.

Valeurs de x	1		10		– 1,2		– 2		$\sqrt{3}$	
Valeurs de y		6		– 2		0		1,6		$\frac{3}{4}$

c. On appelle solution d'une équation du premier degré à deux inconnues tout couple de valeurs de x et de y noté $(x ; y)$ pour lequel l'égalité est vraie.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $6x + 3y = 10$? Cites-en.

d. Place dans un repère les points de coordonnées $(x ; y)$ que tu as déterminés dans le tableau précédent. Que remarques-tu ?

e. Reprends les questions **a.** à **d.** avec l'équation $2x - 3y = 4$. (Tu placeras les points obtenus dans le même repère que précédemment.)

f. On cherche maintenant des couples de valeurs $(x ; y)$ qui sont solutions des deux équations simultanément.

On dit alors d'un tel couple qu'il est solution du système de deux équations du premier degré à deux inconnues noté : $\begin{cases} 6x + 3y = 10 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$.

D'après le graphique, combien de solutions admet ce système ? Lis sur le graphique ces solutions.

g. Vérifie ta réponse en remplaçant x et y par les valeurs trouvées dans la question **f.**. Peux-tu conclure ?

2. Avec un tableur

a. Quelle formule dois-tu programmer dans la cellule B2 pour calculer y_1 dans la première équation quand on connaît x ?
Quelle formule dois-tu programmer dans la cellule C2 pour calculer y_2 dans la deuxième équation quand on connaît x ?

	A	B	C
1	x	y_1	y_2
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

b. Insère un graphique de type ligne pour représenter y_1 et y_2 en fonction de x.

c. Peux-tu trouver une solution au système en utilisant les résultats des deux premières questions ?

d. En affinant le choix des valeurs de x dans la feuille de calcul, tente de trouver une solution au système.

Statistiques

Activité 3 : Un peu extrême

1. D'une extrémité...

On considère le système d'équations suivant : $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ -35x + 7y = -7 \end{cases}$.

a. Reproduis deux fois le tableau suivant puis complète un tableau pour chaque équation du système.

Valeurs de x	1		-2		$-0{,}2$
Valeurs de y		3		7	

b. Place dans un même repère les points des deux tableaux. Que remarques-tu ?

c. Déduis des questions **a.** et **b.** le nombre de solutions que semble avoir le système.

d. Démontre-le.

2. ... à l'autre

a. Reprends les questions **a.** et **b.** de la partie **1.** avec le système $\begin{cases} -12x + 3y = 15 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$.

b. Que penses-tu du nombre de solutions de ce système ?

c. Démontre-le.

3. Au final

Que peux-tu dire du nombre de solutions que peut admettre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ?

Activité 4 : Une méthode de résolution

On considère le système $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x - 5y = 57 \end{cases}$.

Justinien remarque : « Je sais résoudre une équation du premier degré à une inconnue donc si je peux écrire une inconnue en fonction de l'autre, je pourrai obtenir une équation du premier degré à une inconnue. ».

a. Écris toutes les possibilités qu'a Justinien pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre.

b. En utilisant une des expressions trouvées, comment doit s'y prendre Justinien pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue ?

c. Choisis une des expressions que tu as trouvées à la question **a.** et détermine une des deux inconnues.

d. Utilise maintenant la valeur déterminée à la question précédente pour trouver la valeur de la deuxième inconnue.

e. Teste le couple de valeurs (x ; y) trouvé et conclus.

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par substitution.

Statistiques

Activité 5 : Et une autre méthode !

On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ -3x - 7y = 25 \end{cases}$.

a. Résous ce système en utilisant la méthode par substitution.

b. Hakim remarque qu'en additionnant les deux premiers membres des équations, on réussit à « éliminer les termes en x » dans le calcul.

- Qu'obtiens-tu en additionnant les premiers membres de ces équations ?
- Que vaut cette somme ?
- Déduis-en une équation d'inconnue y et résous-la.

c. Hakim se dit maintenant que pour trouver x, il suffirait de pouvoir « éliminer y » !

- Comment devraient être les coefficients de y dans les deux équations pour « éliminer les termes en y » de la même façon qu'à la question précédente ?
- Que peux-tu faire à chacune des équations pour y parvenir ?
- Transforme les équations pour obtenir une équation du premier degré d'inconnue x en procédant de la même façon qu'à la question **b.**.
- Résous cette équation.

d. Teste le couple trouvé et conclus.

e. Compare la méthode utilisée dans la question **a.** et celle que tu viens de mettre en œuvre dans les questions **b.** et **c.**.

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par combinaisons.

Activité 6 : Problème

1. Salomé propose une petite énigme à sa petite soeur :

> Dans un élevage de poules et de lapins, j'ai compté 2 171 têtes et 4 368 pattes.
>
> Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ?

a. Combien ce problème possède-t-il d'inconnues ?

b. Traduis ce problème par un système d'équations du premier degré.

c. Résous le système par la méthode de ton choix.

d. Vérifie que le couple trouvé est bien la solution du problème posé.

e. Conclus.

2. Est-il possible d'avoir compté dans cette basse-cour 2 171 têtes et 5 367 pattes ? Justifie.

3. Et 2 171 têtes et 2 368 pattes, c'est possible ? Justifie.

4. Et 2 171 têtes et 8 684 pattes ? Justifie.

Méthode 1 : Tester des valeurs dans un système d'équations

À connaître

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré **à deux inconnues** désignées par les lettres x et y. Un couple de nombres $(x\,,\,y)$ est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple (2 ; − 3) est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = \mathbf{2}$ et $y = \mathbf{-3}$:
$5x + 2y = 5 \times \mathbf{2} + 2 \times (\mathbf{-3}) = 10 - 6 = 4$ et $-2x + y = -2 \times \mathbf{2} + (\mathbf{-3}) = -7$.
Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple (2 ; − 3) est solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

Exercice « À toi de jouer »

1 Les couples (− 5 ; 1,5) et (1 ; 9,5) sont-ils solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = -24{,}5 \\ 3x + 7y = -4{,}5 \end{cases}$?

Méthode 2 : Résoudre un système par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y = 9 + 3x$ → On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$4x - 3(\mathbf{9 + 3x}) = -17$ → On remplace (substitue) y par $\mathbf{9 + 3x}$ dans la deuxième équation.

$4x - 27 - 9x = -17$
$-5x = 10$
$x = -2$
→ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.

$y = 9 + 3 \times (\mathbf{-2})$
$y = 9 - 6$
$y = 3$
→ On remplace x par $\mathbf{-2}$ dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple (− 2 ; 3) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**. On en déduit que (− 2 ; 3) est la solution de ce système.

Exercice « À toi de jouer »

2 Résous par substitution le système $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ -3x + 4y = 22 \end{cases}$.

Méthode 3 : Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{5} \times (5x - 4y) = \mathbf{5} \times 8 \\ \mathbf{4} \times (2x + 5y) = \mathbf{4} \times 1 \end{cases}$ → On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$ → On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$25x + 8x = 40 + 4$ → On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y

$33x = 44$

$x = \dfrac{44}{33} = \dfrac{4 \times 11}{3 \times 11} = \dfrac{4}{3}$ → On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

Détermination de l'autre inconnue

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{2} \times (5x - 4y) = \mathbf{2} \times 8 \\ \mathbf{5} \times (2x + 5y) = \mathbf{5} \times 1 \end{cases}$ → On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la seconde par **5**.

$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$ → On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.

$-8y - 25y = 16 - 5$ → On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x.

$-33y = 11$

$y = \dfrac{11}{-33} = -\dfrac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\dfrac{1}{3}$ → On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple $\left(\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y, on pouvait aussi remplacer x par $\dfrac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Exercices « À toi de jouer »

3 Résous par combinaisons le système : $\begin{cases} 3x - 7y = 29 \\ 4x - 5y = -33 \end{cases}$.

4 Résous par la méthode de ton choix le système : $\begin{cases} -2x + 3y = 3{,}5 \\ x - 4y = -5{,}5 \end{cases}$.

Méthode 4 : Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. → **On repère les inconnues.** On les note généralement x et y.

Étape n°2 : Mettre le problème en équation

205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.
La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50$. → **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y.

Ainsi $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$. → L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système

On peut résoudre le système par substitution.

$x = 205 - y$ → On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.

$7(\mathbf{205 - y}) + 4{,}50y = 1\,222{,}50$ → On remplace (substitue) x par $\mathbf{205 - y}$ dans la deuxième équation.

$1\,435 - 7y + 4{,}50y = 1\,222{,}50$
$-2{,}50y = -212{,}50$
$y = 85$ → On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y.

$x = 205 - \mathbf{85}$
$x = 120$ → On remplace y par **85** dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x.

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème

Donc, si $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}$.
On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.
On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

Exercice « À toi de jouer »

5 Dans une boulangerie, Paul a acheté quatre croissants et trois pains au chocolat pour 5,65 €. Lina a acheté, dans cette même boulangerie, trois croissants et cinq pains au chocolat pour 6,85 €. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.