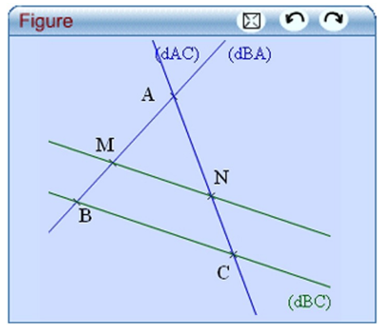
Théorème de Thalès et sa réciproque

Activité 1 : Théorème de Thalès

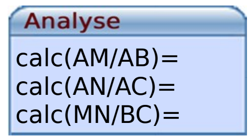
1. Avec le logiciel TracenPoche



a. Place trois points distincts A, B et C, non alignés. Trace les droites (AB), (BC) et (CA). Place un point M sur la droite (AB) puis construis la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point M. Appelle N le point d'intersection de cette droite avec la droite (AC).

b. Quelles sont les différentes possibilités pour la position du point M ? Pour chacune d'elles, fais un dessin sur ton cahier.

c. En utilisant le bouton , affiche les longueurs AM, AB, AN, AC, MN et BC sur la figure. Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9. Que remarques-tu lorsque M décrit chacune des positions définies au **b.** ?



2. 1er cas : M appartient au segment [AB]

a. Que peux-tu dire des longueurs des triangles AMN et ABC ?

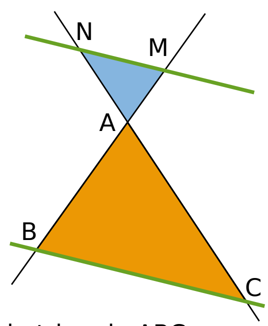
b. Applique alors le théorème vu en quatrième pour justifier ce résultat.

3. 2ème cas : M appartient à la demi-droite [AB) mais pas au segment [AB]

a. En te plaçant dans le triangle AMN, démontre que les quotients $\frac{AB}{AM}$, $\frac{AC}{AN}$ et $\frac{BC}{MN}$ sont égaux.

b. Qu'en déduis-tu pour les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$? Justifie.

4. 3ème cas : M appartient à la droite (AB) mais pas à la demi-droite [AB)



a. Trace un triangle ABC. Place un point M appartenant à la droite (AB) sans appartenir à la demi-droite [AB). Construis la parallèle à la droite (BC) passant par M. Elle coupe la droite (AC) en N. Construis le point M' symétrique du point M par rapport au point A et le point N' symétrique du point N par rapport au point A.

b. Montre que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles. Déduis-en que les droites (BC) et (M'N') sont parallèles.

c. Applique la propriété de proportionnalité des longueurs dans le triangle ABC.

d. Que peux-tu dire des longueurs AM et AM' ? Des longueurs AN et AN' ? Des longueurs MN et M'N' ? Justifie.

e. En utilisant les questions **c.** et **d.**, montre que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

5. Conclusion

Recopie et complète le théorème (appelé théorème de Thalès) :

Soient (....) et (....) deux droites sécantes en A.
Si les droites .... et .... sont .... alors .... .

Théorème de Thalès et sa réciproque

Activité 2 : Avec un guide-âne

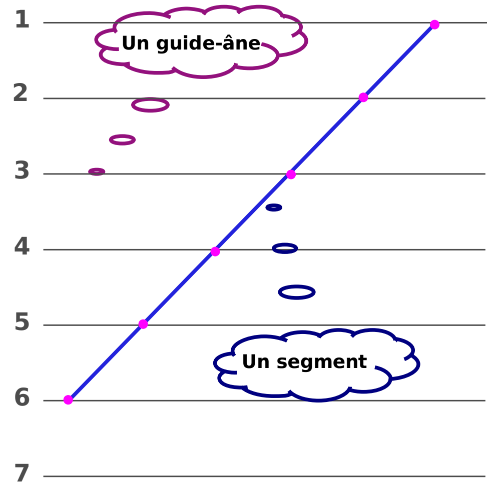
1. Construction

Sur une feuille blanche, trace une série de 15 droites parallèles espacées de 1 cm : cet outil s'appelle un guide-âne.
Ce nom fait référence à l'âne qui tirait les barges le long des bords parallèles des rivières. La corde tendue suivait un chemin parallèle aux bords de la rivière.

2. Explication

a. On a placé un segment sur le guide-âne, explique ce qui lui arrive. Trace cette figure puis complète-la pour pouvoir le démontrer.

b. À ton avis, quel est l'intérêt d'un tel outil ?



3. Utilisation

a. Sur une feuille de papier calque, trace un segment [AB] de 5 cm de longueur.
Utilise le guide-âne pour couper ce segment en trois segments de même longueur.
Place un point M sur le segment [AB] tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

b. Avec ce guide-âne, peux-tu partager le segment [AB] en sept segments de même longueur ? Pourquoi ? Que faudrait-il pour que tu puisses le faire ?

c. Trace un segment [CD] de 8 cm de longueur sur la feuille de papier calque puis partage-le en sept segments de même longueur. Place alors un point P sur la droite (CD) tel que $\frac{CP}{CD} = \frac{6}{7}$. Que remarques-tu ?

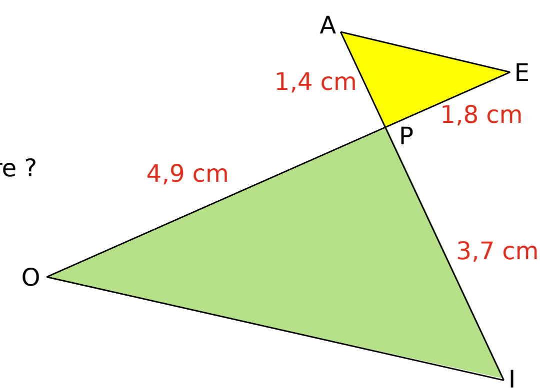
d. Trace un segment [EF] de 6,3 cm de longueur. Place un point R sur la droite (EF) tel que $\frac{ER}{EF} = \frac{5}{3}$. Où se trouve le point R ?

4. Avec le logiciel TracenPoche

a. Trace un segment [AB]. À l'aide du bouton , partage le segment [AB] en cinq segments de même longueur. Explique comment tu procèdes.

b. Sur quels éléments du guide-âne peux-tu jouer ?
Quel est l'intérêt d'un tel outil ?

Activité 3 : Papillon ?



Que peux-tu démontrer à partir de cette figure ?

Quel théorème utilises-tu ?

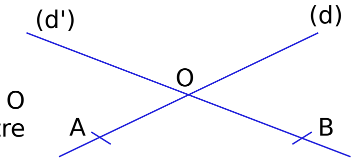
Théorème de Thalès et sa réciproque

Activité 4 : Réciproque

1. Une conjecture

a. Énonce la réciproque du théorème de Thalès.
Le but est maintenant de savoir si elle est vraie ou fausse.

b. Sur ton cahier, trace deux droites (d) et (d') sécantes en O puis place les points A et B comme sur la figure ci-contre avec OA = 9 cm et OB = 8 cm.



Dans la suite de cette partie, on considère que **les points O, M, A d'une part et les points O, N, B d'autre part sont alignés dans le même ordre**. M sera nommé successivement M_1, M_2, M_3 et N sera nommé successivement N_1, N_2, N_3.

c. Place les points M_1 sur [OA) et N_1 sur [OB) tels que $\frac{OM_1}{OA} = \frac{3}{5}$ et $\frac{ON_1}{OB} = \frac{3}{5}$.

Que remarques-tu ?

d. Place les points $M_2 \in [OA)$ et $N_2 \in [OB)$ tels que $\frac{OM_2}{OA} = \frac{ON_2}{OB} = \frac{5}{4}$. Que remarques-tu ?

e. Dans cette question, $M_3 \in (OA)$ mais pas à [OA) et $N_3 \in (OB)$ mais pas à [OB).
Complète la figure précédente et place les points M_3 et N_3 tels que $\frac{OM_3}{OA} = \frac{ON_3}{OB} = \frac{1}{2}$.

Que remarques-tu ?

f. Cette réciproque semble-t-elle vraie ou fausse ?

2. Démonstration

On suppose que les points O, M, A d'une part et les points O, N, B d'autre part sont alignés dans le même ordre et que $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

On appelle K le point d'intersection de (OB) et de la parallèle à (AB) passant par M.

a. Si M appartient à [OA), où se trouve le point K ? Fais un dessin.
Et si M appartient à (OA) mais pas à [OA) ? Fais un dessin.

b. Dans quelle configuration peux-tu appliquer le théorème de Thalès ? Écris alors les égalités de quotients.

c. Qu'en déduis-tu pour les rapports $\frac{ON}{OB}$ et $\frac{OK}{OB}$? Justifie.

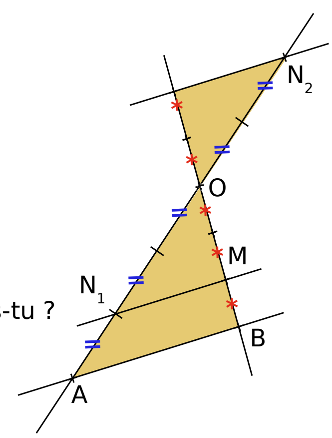
d. Que peux-tu conclure pour les point K et N ?

e. Que peux-tu dire alors des droites (MN) et (AB) ?

f. Qu'en conclus-tu ?

3. Attention à la position des points

On considère la figure ci-contre.



a. Que valent les rapports $\frac{OM}{OB}$, $\frac{ON_1}{OA}$ et $\frac{ON_2}{OA}$? Qu'en déduis-tu ?

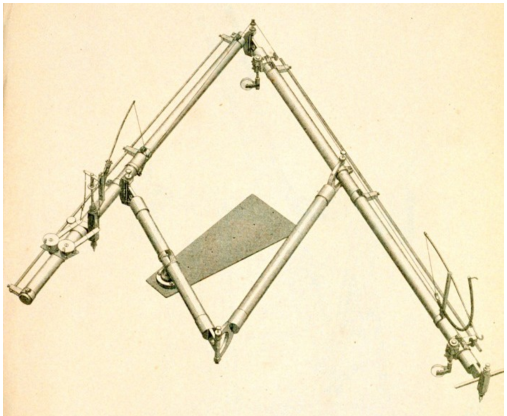
b. Que dire des droites (MN_1) et (AB) ? Justifie.

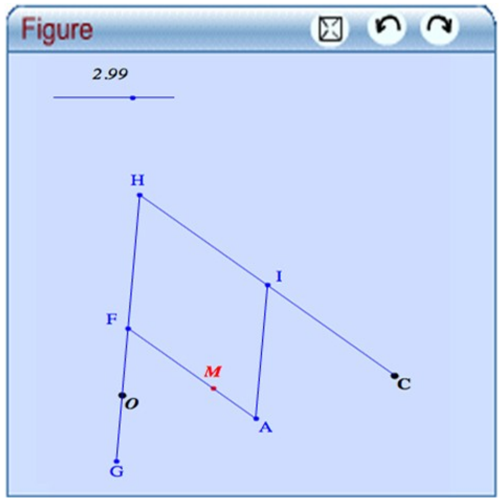
c. Que dire des droites (MN_2) et (AB) ?
Quelle condition de la réciproque du théorème de Thalès n'est pas respectée ?
Conclus.

Théorème de Thalès et sa réciproque

Activité 5 : Avec un pantographe

1. Description et utilisation





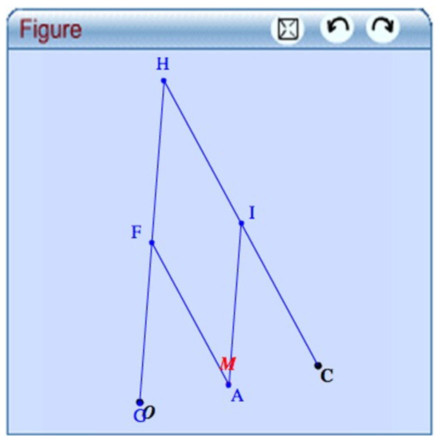
a. Voici ci-dessus la photo d'un pantographe. A ton avis, à quoi cet objet peut-il servir ?

b. Dans le logiciel Tracenpoche, on a simulé un pantographe virtuel (voir ci-dessus).

Déplace le point M. Que se passe-t-il ? (pour faire plusieurs tentatives, appuie sur la touche F7)

c. Que se passe-t-il si on modifie la valeur avec le curseur. A quoi correspond cette valeur ?

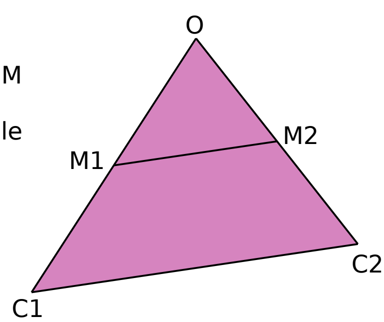
2. Démonstration dans un cas simple.



a. On se place dans le cas où le point M se retrouve sur le point A. Que se passe-t-il dans ce cas ? C'est ce que nous allons démontrer.

b. Sachant que les points O, M et C sont alignés, que F est le milieu de [OH] et que FHIM est un parallélogramme, démontre que M est le milieu de [OC].

c. Voici les positions finales et initiales du point M quand il parcourt le segment [M1M2].
Code la figure et démontre que C1C2 est le double de M1M2.

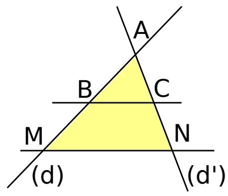


Méthode 1 : Calculer une longueur

À connaître : Théorème de Thalès

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles** alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Exemple 1 : Sur la figure ci-contre, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. AB = 3 cm ; AN = 4 cm et AM = 7 cm.
Calcule la longueur AC.

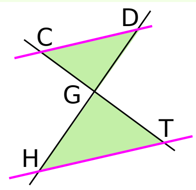


Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$, soit $\dfrac{3}{7} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{BC}{MN}$.

On utilise la propriété des produits en croix pour calculer la longueur demandée.

Calcul de AC : $7 \times AC = 3 \times 4$ soit $AC = \dfrac{3 \times 4}{7} = \dfrac{12}{7}$ donc $AC = \dfrac{12}{7}$ cm.

Exemple 2 : Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles.
On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm.
Calcule GT et CD.



Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G.
Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{GC}{GT} = \dfrac{GD}{GH} = \dfrac{CD}{HT}$, soit $\dfrac{20}{GT} = \dfrac{25}{45} = \dfrac{CD}{27}$.

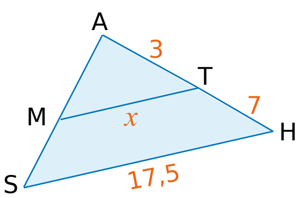
Calcul de GT : $25 \times GT = 45 \times 20$.
$GT = \dfrac{45 \times 20}{25}$
donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : $25 \times 27 = 45 \times CD$.
$CD = \dfrac{25 \times 27}{45}$
donc CD = 15 mm.

Exercices « À toi de jouer »

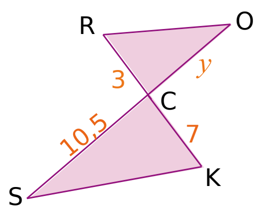
1 Dans chacun des cas suivants, calcule, si c'est possible, la valeur de x, y et z indiquée sur la figure.

a.



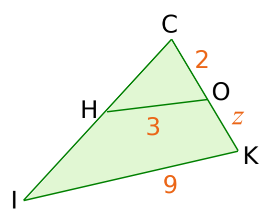
(MT) // (SH)

b.



(RO) // (SK)

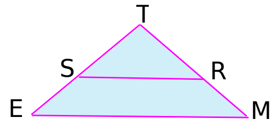
c.



2 Dans le triangle DOT, E est un point de [DO]. La parallèle à (OT) passant par E coupe [DT] en F. On sait que DO = 6 cm ; DT = 5 cm ; OT = 8 cm et DF = 1 cm.
Calcule DE et EF.

Méthode 2 : Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Exemple : Sur la figure ci-contre, TR = 11 cm ; TS = 8 cm ;
TM = 15 cm et TE = 10 cm.
Montre que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.



Les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.

D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$.

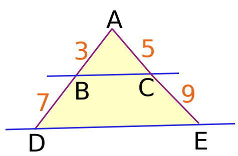
D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$.

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$. Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

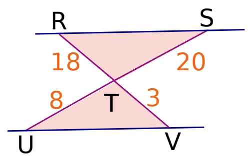
Exercices « À toi de jouer »

3 Montre que les droites bleues ne sont pas parallèles.

a.



b.

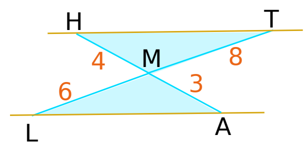


Méthode 3 : Montrer que deux droites sont parallèles

À connaître : Réciproque du théorème de Thalès

> Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
> B et M sont deux points de (d) distincts de A.
> C et N sont deux points de (d') distincts de A.
> Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple : Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$.

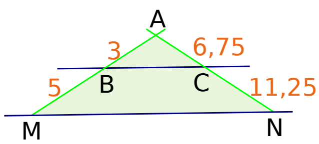
D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$. De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

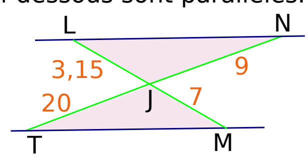
Exercices « À toi de jouer »

4 Montre que les droites bleues dans les figures ci-dessous sont parallèles.

a.



b.



Méthode 4 : Agrandir ou réduire une figure

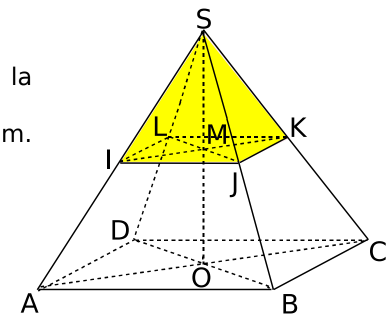
À connaître

Lorsque deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre.
Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Remarques : Si **F** est un agrandissement de **F '** alors **F '** est une réduction de **F**.

Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ($k > 1$) ou de réduction ($0 < k < 1$).

Exemple 1 : La pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD.
On donne AB = 6 cm ; SA = 15 cm et SI = 5 cm.
Calcule IJ.



On sait que la pyramide SIJKL est une réduction de rapport k de la pyramide SABCD.
Donc les longueurs des deux pyramides sont proportionnelles.

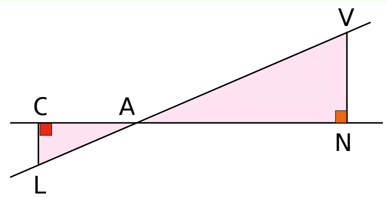
[SI] étant une réduction de rapport k de [SA], on en déduit que : $k = \frac{\text{SI}}{\text{SA}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

De même, [IJ] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AB].

Donc $\text{IJ} = k \times \text{AB} = \frac{1}{3}\text{AB} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

Exemple 2 : Les droites (VL) et (CN) sont sécantes en A.
(LC) et (VN) sont perpendiculaires à (CN).

Le triangle LAC est-il une réduction du triangle VAN ?
Justifie ta réponse.



1) Les triangles LAC et VAN sont deux triangles rectangles donc ils ont la même forme.

2) Vérifions que les longueurs sont proportionnelles.

Les droites (CN) et (VL) sont sécantes en A.
Les droites (LC) et (NV) sont perpendiculaires à la même droite (AN) donc elles sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{\text{AV}}{\text{AL}} = \frac{\text{NV}}{\text{LC}}$.

Les longueurs des triangles VAN et LAC sont donc proportionnelles.

On peut alors conclure que le triangle LAC est une réduction du triangle VAN.

Exercices « À toi de jouer »

5 Soit TRAN un losange tel que TR = 5 cm et tel que l'angle $\widehat{\text{TRA}}$ mesure 30°.

On sait que JEDI est un agrandissement de rapport $\frac{3}{2}$ de TRAN. Construis JEDI.