Fiche : Coniques

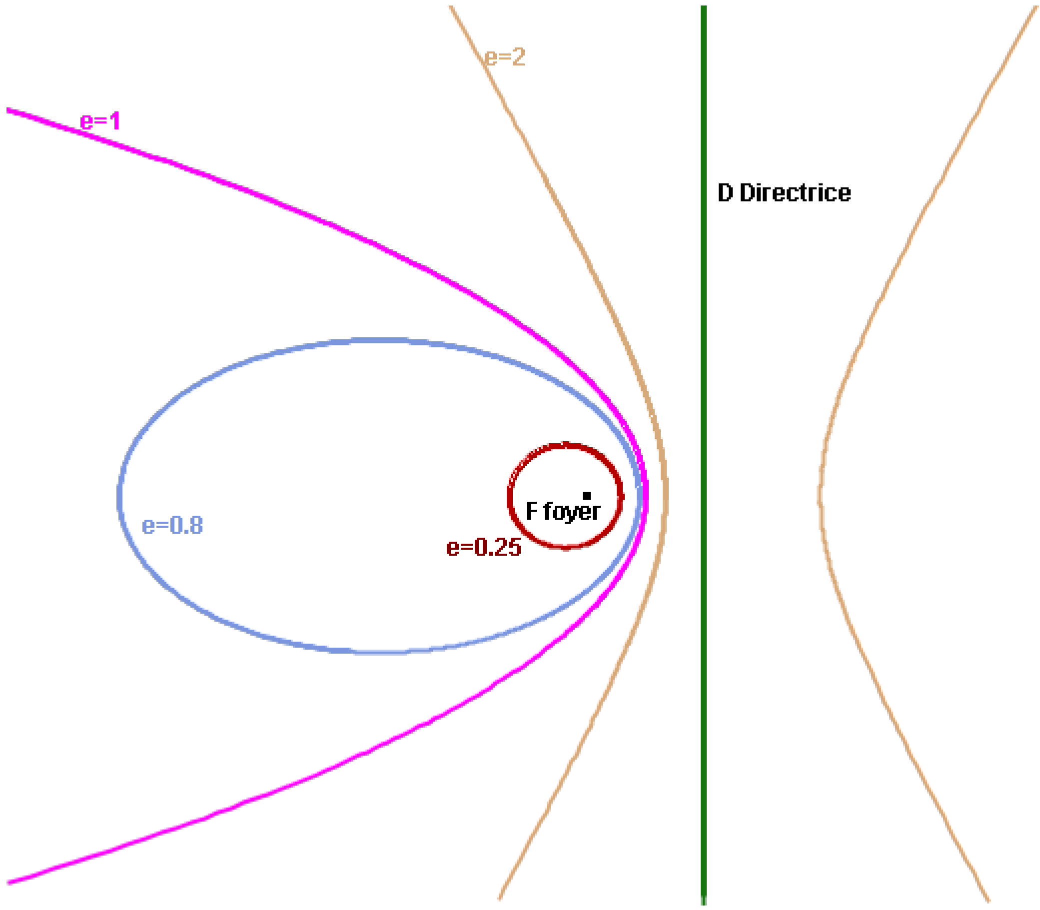
I- Définition géométrique d'une conique :

Soit un point F et une droite D (ne passant pas par F) du plan, et soit e un réel strictement positif. On appelle conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

Suivant les diverses valeurs de e, on trouve les 3 types de conique :

- $e < 1$: ellipse,
- $e = 1$: parabole,
- $e > 1$: hyperbole.

La figure ci-dessous permet de mesurer l'influence de l'excentricité e quand le foyer F et la directrice D sont fixés.



La droite perpendiculaire à la directrice D et passant par le foyer F s'appelle axe focal de la conique.
Remarquons qu'ellipses et hyperboles possèdent un centre de symétrie. Voilà pourquoi on les appelle coniques à centre.

Fiche : Coniques

II- Définition analytique d'une conique :

On appelle conique du plan toute courbe tel qu'il existe un repère orthonormé du plan dans lequel l'équation de la conique est de la forme :

$$\alpha x^2+\beta y^2+2\gamma xy+2\delta x+2\lambda y+\omega=0$$

On vérifie alors aisément que dans tout repère orthonormé du plan, la conique admet une équation de cette forme. On cherche souvent un repère où l'équation de la conique est la plus simple possible (on parle d'équation réduite).

D'abord, en effectuant une rotation du repère, il est possible de trouver une équation sans terme en xy, c'est-à-dire une équation de la forme :
$Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$

Ensuite, en effectuant un changement d'origine, on arrive à 3 types d'équation principales :

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, où $a>0$ et $b>0$

   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une ellipse.

2. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ou $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, où $a>0$ et $b>0$

   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une hyperbole.

3. $y^2=2px$ ou $y^2=-2px$ ou $x^2=2py$ ou $x^2=-2py$ où $p>0$.

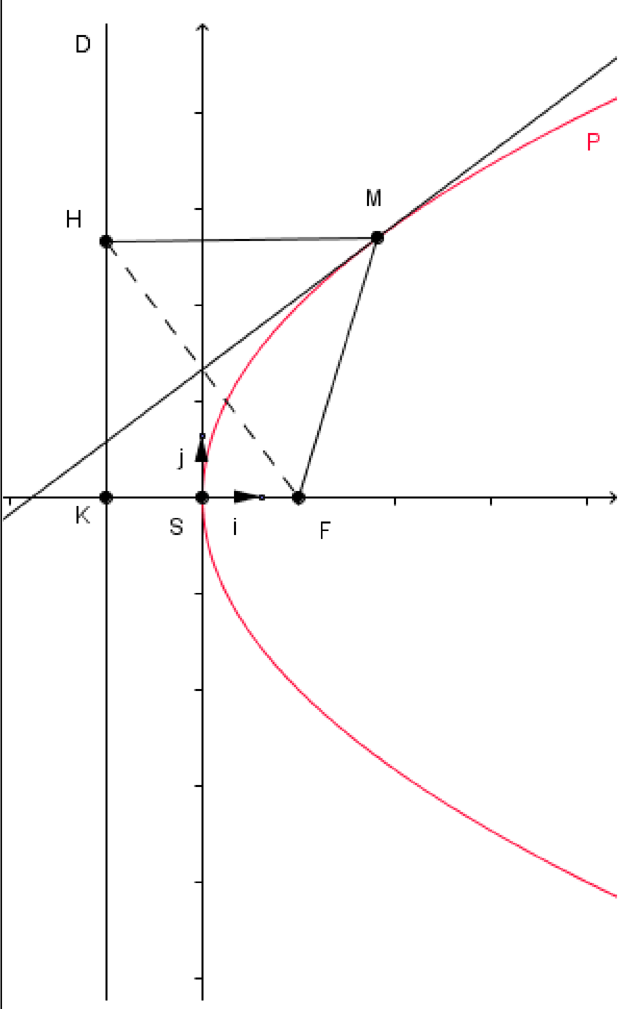
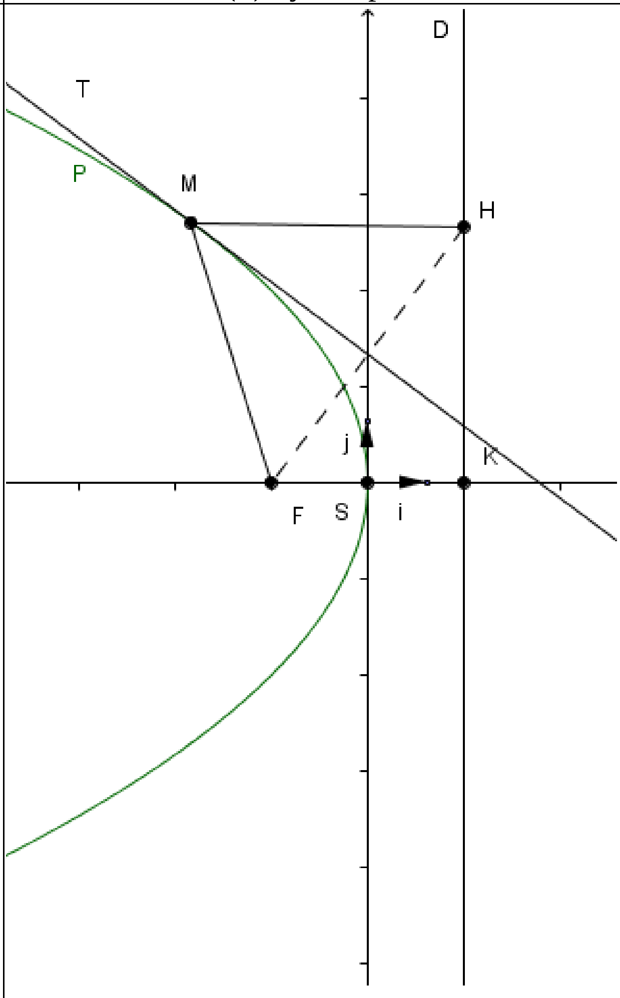
   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une parabole.

Fiche : Coniques

III- La parabole

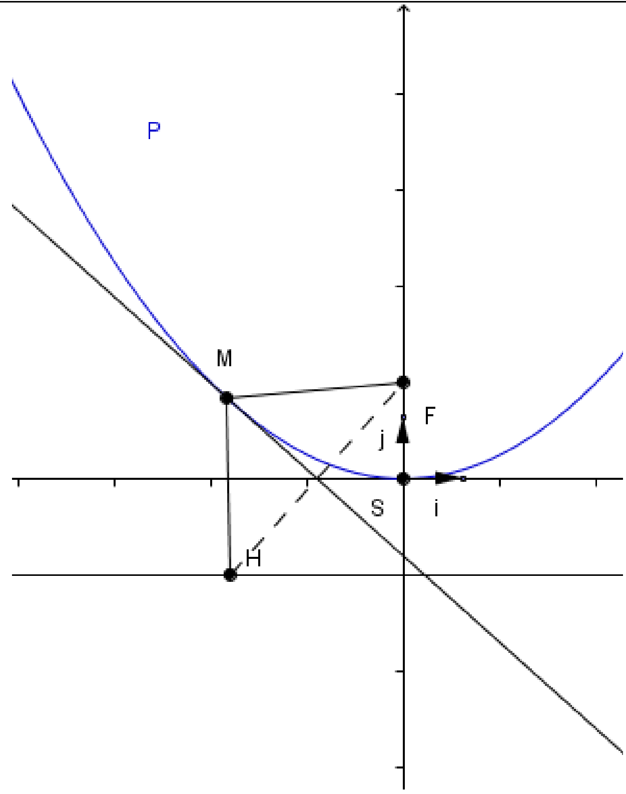
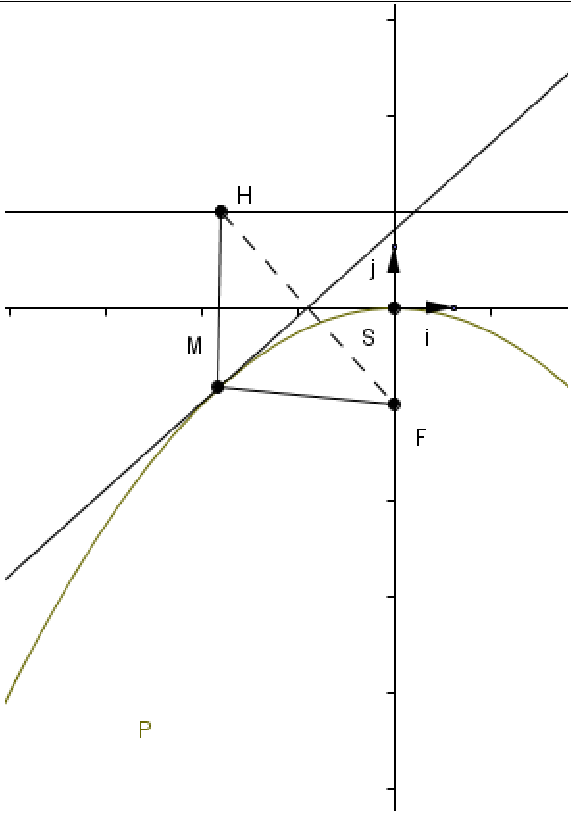
Lorsqu'on étudie une parabole (P) , on introduit son paramètre, noté p, qui est la distance entre la directrice D et le foyer F. Notons K le projeté orthogonal de F sur D. Dans un repère orthonormé $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ où S est le milieu de [KF], et où (KF) est l'axe focal.

1. Si $\vec{i}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}=\frac{2}{p}\overrightarrow{SF}$:

(P) : $y^2 = 2px$	(P) : $y^2 = -2px$
	
L'axe focal est $\left(S,\vec{i}\right)$ Le foyer de (P) est $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ La directrice de (P) est D : $x=-\frac{p}{2}$ Une équation de la tangente (T) au point M $\left(x_0,y_0\right)$ est $y_0.y=p\left(x+x_0\right)$	L'axe focal est $\left(S,\vec{i}\right)$ Le foyer de (P) est $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ La directrice de (P) est D : $x=\frac{p}{2}$ Une équation de la tangente (T) au point M $\left(x_0,y_0\right)$ est $y_0.y=-p\left(x+x_0\right)$

Fiche : Coniques

2. Si $\vec{j} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF} = \frac{2}{p}\overrightarrow{SF}$:

(P) : $x^2 = 2py$	(P) : $x^2 = -2py$
	
L'axe focal est $(S, \vec{j})$ Le foyer de (P) est F $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ La directrice de (P) est D : $y = -\frac{p}{2}$ Une équation de la tangente (T) au point M (x_0, y_0) est $x_0.x = p(y + y_0)$	L'axe focal est $(S, \vec{j})$ Le foyer de (P) est F $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ La directrice de (P) est D : $y = \frac{p}{2}$ Une équation de la tangente (T) au point M (x_0, y_0) est $x_0.x = -p(y + y_0)$

Fiche : Coniques

IV- L'hyperbole

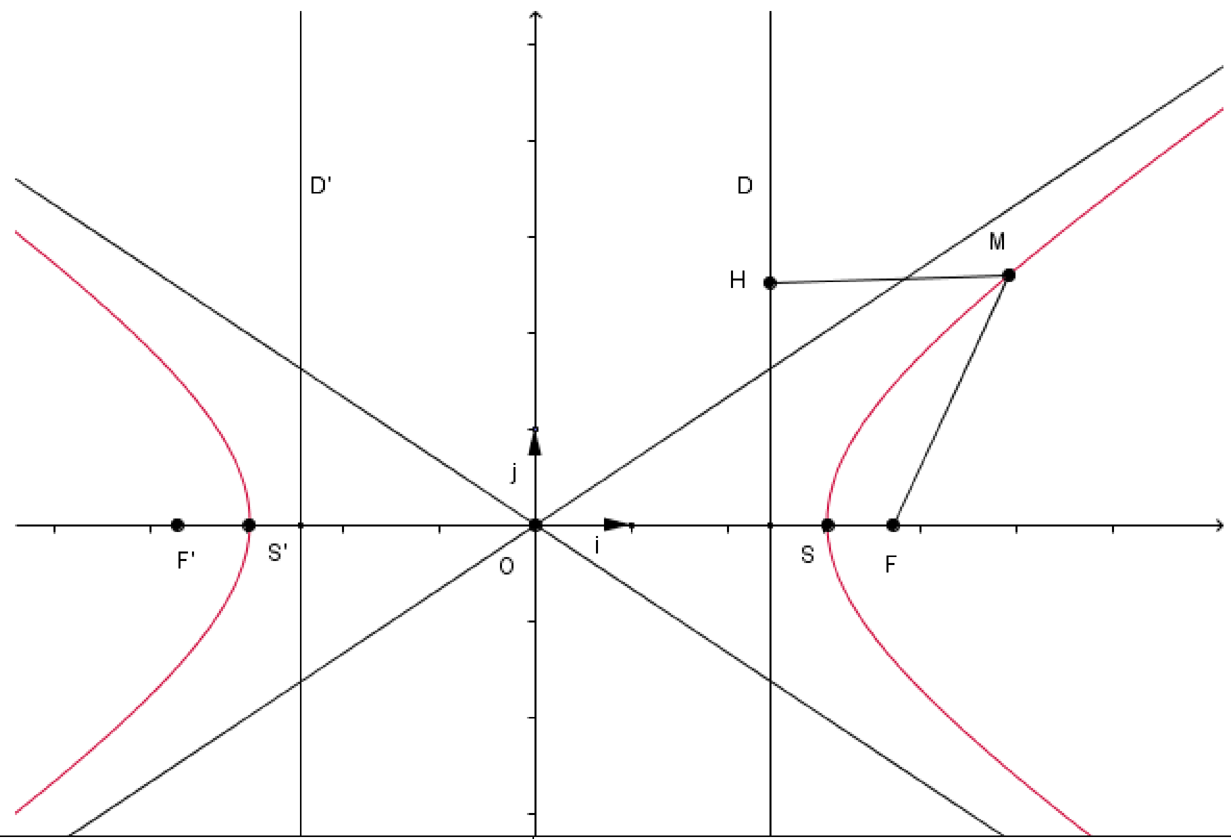
Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole de centre O. Considérons le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On introduit les réels a et c strictement positifs tels que OF = c et OS = a où S est le sommet de $(\mathcal{H})$ appartenant au segment [OF].

1. Si $\vec{i}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}=\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$:

   On pose b = $\sqrt{c^2-a^2}$ ainsi $a^2+b^2=c^2$.

   L'excentricité de $(\mathcal{H})$ est $e=\frac{c}{a}>1$.

$$(\mathcal{H}) : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



L'axe focal est $\left(O,\vec{i}\right)$	Les foyer sont $F\left(c,0\right)$ et $F'\left(-c,0\right)$
Les sommets S(a,0) et S'(a,0)	
Les asymptotes sont d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$	Les directrices associées sont $D: x=\frac{a^2}{c}$ et $D': x=-\frac{a^2}{c}$

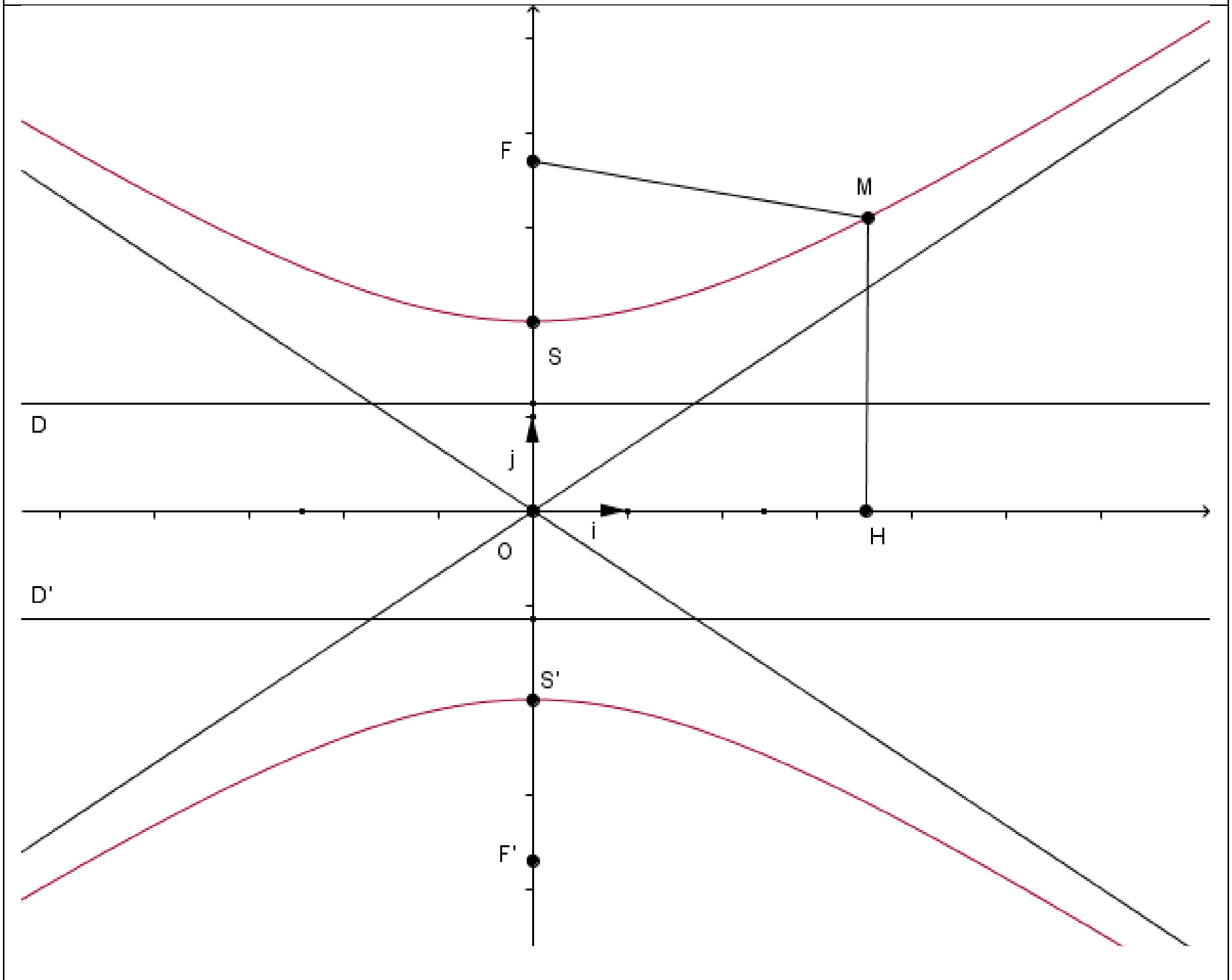
Fiche : Coniques

2. Si $\vec{j}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}=\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$:

   On pose $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ainsi $a^2+b^2=c^2$.

   L'excentricité de $(\mathcal{H})$ est $e=\frac{c}{b}>1$.

$$(\mathcal{H}) : -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



L'axe focal est $(O,\vec{j})$	Les foyer sont $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$
Les sommets S(0,b) et S'(0,-b)	Les directrices associées sont $D: y=\frac{b^2}{c}$ et $D': y=-\frac{b^2}{c}$
Les asymptotes sont d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$	

Fiche : Coniques

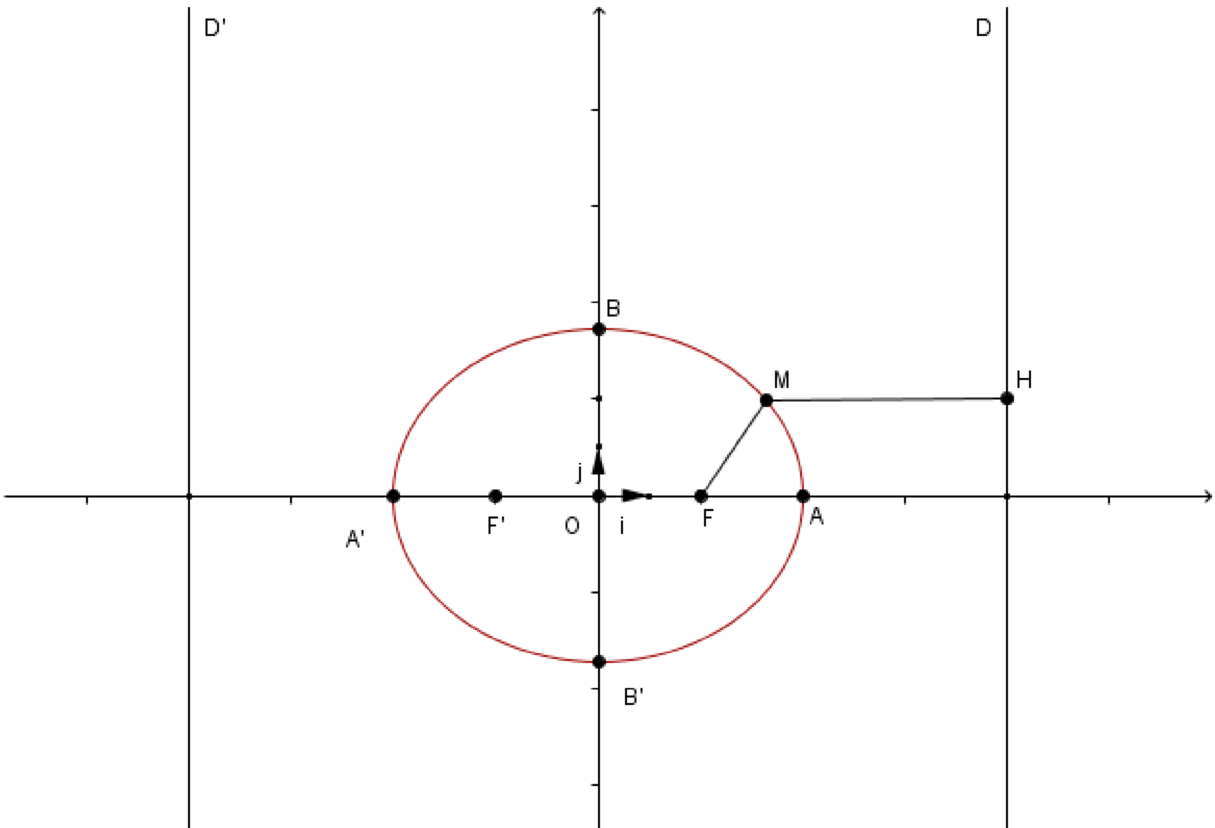
V- L'ellipse

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse de centre O. Considérons le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On introduit les réels a et c strictement positifs tels que OF = c et OA = a où S est le sommet de $(\mathcal{E})$ tel F appartenant au segment [OS].

1. Si $\vec{i}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}=\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$:

   On pose b = $\sqrt{a^2-c^2}$ ainsi $a^2-b^2=c^2$.

   L'excentricité de $(\mathcal{E})$ est $e=\frac{c}{a}<1$.

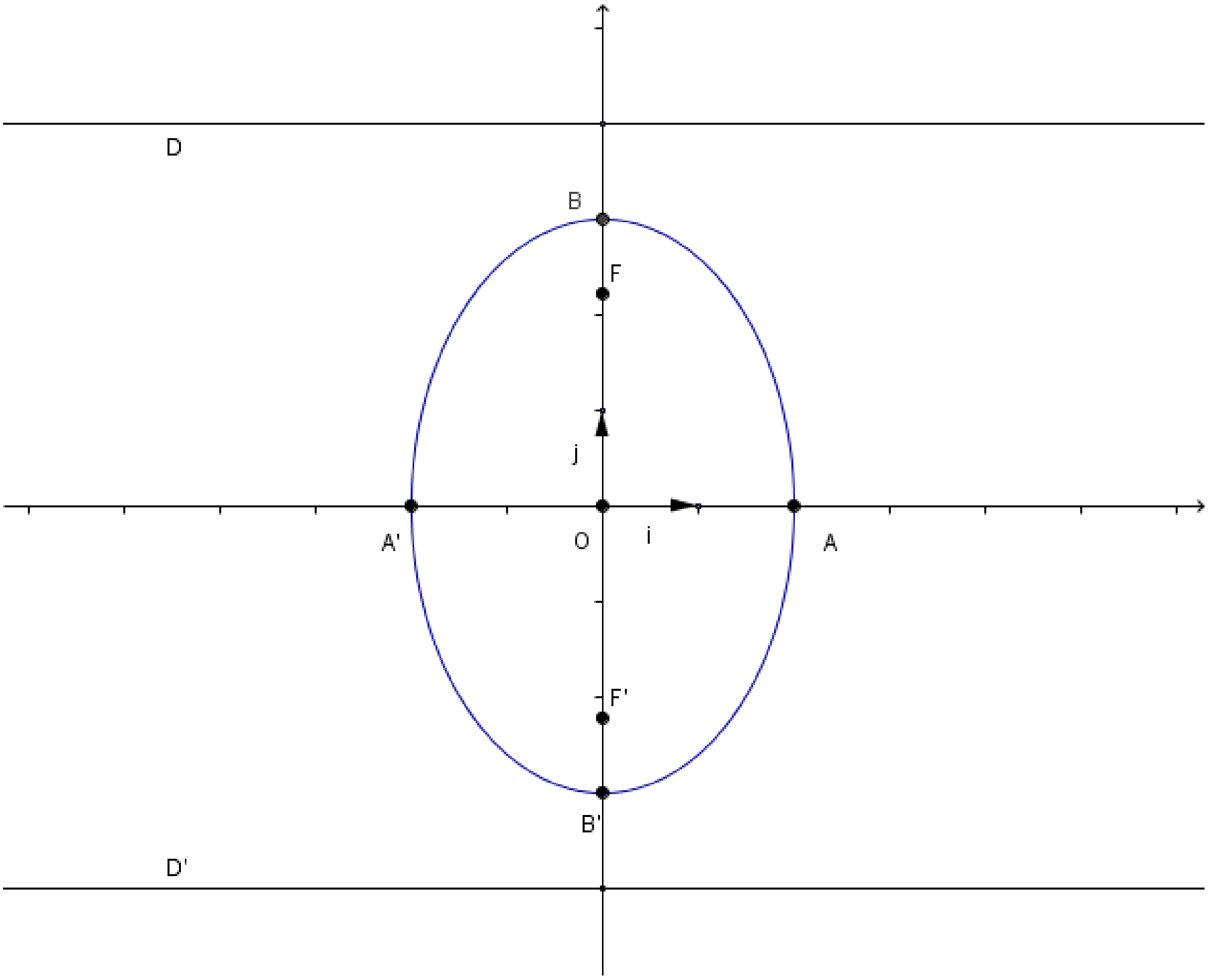
<table>
<tr><td colspan="2">$(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>L'axe focal est $\left(O,\vec{i}\right)$</td><td>Les foyer sont $F\left(c,0\right)$ et $F'\left(-c,0\right)$</td></tr>
<tr><td>Les sommets principaux :
A(a,0) et A'(a,0)
Les sommets secondaires :
B(0,b) et B'(0,-b)</td><td>Les directrices associées sont
$D : x=\frac{a^2}{c}$ et $D' : x=-\frac{a^2}{c}$</td></tr>
</table>

Fiche : Coniques

3. Si $\vec{j}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}=\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$:

   On pose b = $\sqrt{c^2-a^2}$ ainsi $b^2-a^2=c^2$.

   L'excentricité de $(\mathcal{E})$ est $e=\frac{c}{b}<1$.

<table>
<tr><td colspan="2">$(\mathcal{E}):\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>L'axe focal est $(O,\vec{j})$</td><td>Les foyer sont $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$</td></tr>
<tr><td>Les sommets principaux :
B(0,b) et B'(0,-b)
Les sommets secondaires :
A(a,0) et A'(-a,0)</td><td>Les directrices associées sont
$D: y=\frac{b^2}{c}$ et $D': y=-\frac{b^2}{c}$</td></tr>
</table>