



## Primitives

### I- Définition et théorèmes

#### Définition :

Soit  $f$  et  $F$  deux fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ .  
 $F$  est dite une primitive de  $f$  sur  $I$  si, et seulement si,  $F$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

#### Remarque:

Pour vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , il suffit de dériver  $F$  ; on doit trouver que  $F' = f$ .

#### Théorème 1:

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

#### Théorème 2:

Soit  $f$  une fonction admettant une primitive  $F$  sur un intervalle  $I$ .  
 Alors toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $G$  définies sur  $I$  par : pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) = F(x) + c$ , avec  $c$  un nombre réel.

#### Théorème 3:

Soit  $f$  une fonction admettant des primitives sur un intervalle  $I$ ,  $x_0$  un point de  $I$  et  $y_0$  un réel quelconque fixé.

Il existe alors une unique primitive de  $f$ ,  $F$ , telle que  $F(x_0) = y_0$ .

$F$  est appelée la primitive de  $f$  sur  $I$  qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .

#### Théorème 4:

Si  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux réels,  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $I$ , alors  $aF + bG$  est une primitive de  $af + bg$  sur  $I$ .

#### Retenons

Si  $f$  et  $g$  sont deux dérivables sur un intervalle  $I$  telles que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = g'(x)$  alors il existe un nombre réel  $c$  tel que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $g(x) = f(x) + c$

### II- Calcul de primitives de fonctions usuelles.

Donnons donc le tableau des primitives qui doit être parfaitement connu ( $c$  est un réel) :

| Si $f$ est définie par | sur l'intervalle                     | alors ses primitives s'écrivent |
|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|
| $a$ , $a$ réel fixé    | $\mathbb{R}$                         | $ax + c$                        |
| $x$                    | $\mathbb{R}$                         | $\frac{1}{2}x^2 + c$            |
| $x^n$ , $n \geq 1$     | $\mathbb{R}$                         | $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$      |
| $x^n$ , $n < -1$       | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$      |
| $\frac{1}{x^2}$        | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ | $-\frac{1}{x} + c$              |
| $\cos x$               | $\mathbb{R}$                         | $\sin x + c$                    |
| $\sin x$               | $\mathbb{R}$                         | $-\cos x + c$                   |



## Primitives

|                                     |                                                |                                 |
|-------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\cos(ax + b), a \neq 0$            | $\mathbb{R}$                                   | $\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$  |
| $\sin(ax + b), a \neq 0$            | $\mathbb{R}$                                   | $-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ |
| $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ | $\tan x + c$                    |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$                | $]0, +\infty[$                                 | $2\sqrt{x} + c$                 |
| $\sqrt{x}$                          | $[0, +\infty[$                                 | $\frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$     |

### III- Savoir reconnaître une formule composée

Dans le tableau suivant,  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

| $f$                     | $F$                     | Conditions                                  |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------------------------|
| $k.u', k \text{ réel}$  | $k.u$                   |                                             |
| $u' + v'$               | $u + v$                 |                                             |
| $u'.v + u.v'$           | $u.v$                   |                                             |
| $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $\frac{u}{v}$           | $v$ ne s'annule pas sur $I$                 |
| $u'u^n$                 | $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ | $n \geq 1$                                  |
| $u'u^n$                 | $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ | $n \leq -2$ et $u$ ne s'annule pas sur $I$  |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$   | $2\sqrt{u}$             | $u$ est positive et ne s'annule pas sur $I$ |
| $u'\sqrt{u}$            | $\frac{2}{3} u\sqrt{u}$ | $u$ est positive sur $I$ .                  |

### IV- Calcul de primitives de fonctions trigonométriques

#### Exemple 1 :

Soit  $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$

- Montrer que  $f(x) = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x)$ .
- Calculer alors toutes les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Solution:

- Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^2 x \cdot \sin^3 x = \sin x (\cos^2 x \cdot \sin^2 x) \\
 &= \sin x [\cos^2 x (1 - \cos^2 x)] = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x)
 \end{aligned}$$

- Pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x) = \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$

Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c, c \in \mathbb{R}$



## Primitives

**Remarque :** ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type  $\cos^n x \cdot \sin^m x$  avec **n ou m impair**. La méthode de calcul est toujours la même et est basée sur la formule  $\cos^2 + \sin^2 x = 1$ .

### Exemple 2 :

Soit  $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$ .

- a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$   
 b) Calculer alors toutes les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution:

Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x \cdot \sin^4 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{64} (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^4 \\ &= \frac{1}{64} \left[ (e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix}) \right]^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{1}{64} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &= \frac{1}{64} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{64} (e^{6ix} - 2e^{4ix} + e^{2ix} - 2e^{2ix} + 4 - 2e^{-2ix} + e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= \frac{1}{64} \left[ (e^{6ix} + e^{-6ix}) - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4 \right] \\ &= \frac{1}{64} (2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4) \\ &= \frac{1}{32} (\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2) \end{aligned}$$

- c) Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{32} \left( \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + 2x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Remarque :** ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type  $\cos^n x \cdot \sin^m x$  avec **n et m pairs**. La méthode de calcul est toujours la même et est basée sur la linéarisation.

## V- Calcul de primitives de fonctions rationnelles

### Exemple 1:

Soit  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$ .

- a) Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$
  
 b) Calculer toutes les primitives de  $f$  sur  $] -\infty, 1[$ .

### Solution:

- a) On remarque que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,



## Primitives

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + 1}{(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{ainsi } a = 2 \text{ et } b = 1.$$

b) Les primitives de  $f$  sur  $] -\infty, 1[$  sont  $x \mapsto 2x - \frac{1}{x-1} + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$

### Exemple 2:

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$ .

1. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,

$$f(x) = ax + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

2. Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $] -1, 1[$  qui s'annule en 0.

**Solution:**

1. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{ax(x^2-1)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1)^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax(x^2-1)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1)^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax(x^4 - 2x^2 + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x^2 - 2x + 1)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax^5 - 2ax^3 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx^2 - 2cx + c}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax^5 - 2ax^3 + (b+c)x^2 + (a+2b-2c)x + b+c}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ b + c = 0 \\ a + 2b - 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

2. Comme pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$  alors toute primitive  $F$  de  $f$  sur

$$]-1, 1[ \text{ s'écrit } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Pour que  $F$  soit la primitive de  $f$  sur  $] -1, 1[$  qui s'annule en 0, il faut que  $F(0) = 0$  d'où  $c = -2$ .

$$\text{Ainsi, pour tout } x \text{ de } ] -1, 1[, F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$