Lycée Ibn Khaldoun - Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de contrôle n°3 Mathématiques 21 - 04 - 2009	Classes : 4 SE 3 Durée : 2h

Exercice 1 *(3 points)*

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est 0,4. On répète 10 fois de suite la même expérience de façon indépendante. La probabilité que A soit réalisé au moins une fois est :

a) $(0,6)^{10}$ b) $1-(0,4)^{10}$ c) $1-(0,6)^{10}$

2. La limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n}$

a) 1 b) $\frac{1}{1-e^{-1}}$ c) $\frac{e}{e-1}$

3. La fonction $f : x \mapsto \ln\left(e^{(2x-1)} - 1\right)$ est définie sur :

a) $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ b) $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ c) $\left]\frac{1+\ln 2}{2}, +\infty\right[$

Exercice 2 *(5 points)*

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x de $]0, +\infty[$, on ait :

$$\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = a + \frac{be^x}{e^x - 1}.$$

2. En déduire l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} dx$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + e^{-x+1}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x + 1 est une asymptote à (C).
2. Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer (D) et (C).
4. Montrer que l'équation f(x) = 4 admet une racine unique α et vérifier que
   2,84 < α < 2,86.

5. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), son asymptote (D) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 *(6 points)*

Pour faire face à une certaine maladie, on vaccine 40% des personnes d'une population. Puis, après un certain temps, on effectue un contrôle de cette population. On obtient les résultats suivants : 85% des personnes vaccinées ne sont pas atteintes par la maladie et que 75% des personnes non vaccinées sont atteintes par la maladie.
On choisit, au hasard, une personne de cette population.
Soit les événements suivants :

M : « la personne choisie est atteinte par la maladie ».
V : « la personne choisie est vaccinée».

1. Dessiner l'arbre de probabilité correspondant à cette épreuve.

2. a) Vérifier que la probabilité de l'événement $M \cap V$ est égale à $\frac{3}{50}$.
   b) Quelle est la probabilité que la personne choisie soit atteinte par la maladie et non vaccinée?
   c) En déduire la probabilité P (M).

3. La personne choisie est non atteinte par la maladie. Calculer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

4. On décide de soigner cette population.
   - La personne non atteinte de la maladie n'a rien à payer;
   - le soin coûte 10 D, si la personne est vaccinée et a la maladie ;
   - il coûte 50 D, si la personne n'est pas vaccinée et a la maladie ;

On note X la variable aléatoire égale au coût de soin d'une personne malade.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente ce nombre ?

Corrigé

Exercice 1 *(3 points)*

1. c)

En effet : $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0,6$ donc la probabilité que A ne soit jamais réalisé est $(0,6)^{10}$. D'où la probabilité que A soit réalisé au moins une fois est $1-(0,6)^{10}$

2. b)

En effet : $u_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n} = \dfrac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}$.

Comme $e^{-1} \in \left]-1,1\right[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-e^{-1}}$

3. a)

En effet : $\ln\left(e^{2x-1}-1\right)$ existe $\Leftrightarrow e^{2x-1}-1>0 \Leftrightarrow e^{2x-1}>1 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 *(5 points)*

1. On a : pour tout x réel, $a + \dfrac{be^x}{e^x-1} = \dfrac{a\left(e^x-1\right)+be^x}{e^x-1} = \dfrac{(a+b)e^x - a}{e^x-1}$.

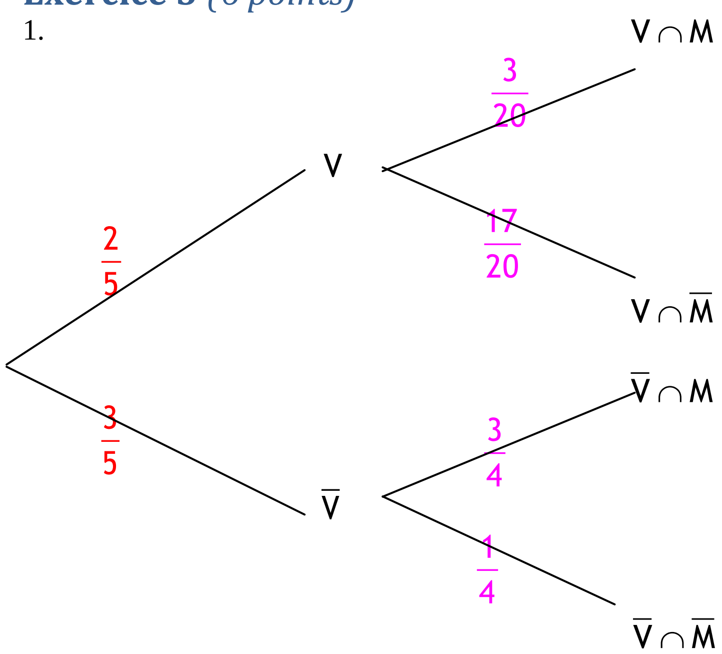
   Par identification, on obtient : $\begin{cases} a+b=2 \\ -a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$.

2. On a , ainsi,

   $$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2e^x-3}{e^x-1}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(3 - \frac{e^x}{e^x-1}\right)dx = \left[3x - \ln\left(e^x-1\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = 3\ln 2 - \ln 3.$$

Exercice 3 *(6 points)*

1.



2. a) $P(M \cap V) = P(V) \times P(M/V) = \frac{40}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$.

b) $P(M \cap \overline{V}) = P(\overline{V}) \times P(M/\overline{V}) = \frac{60}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

c) $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V}) = \frac{6}{100} + \frac{45}{100} = \frac{51}{100}$.

3. $P(V/\overline{M}) = \frac{P(V \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{85}{100}}{1 - \frac{51}{100}} = \frac{34}{49}$.

4. Les valeurs de X sont : 0 , 10 et 50.

$p(X=0) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = \frac{49}{100}$; $p(X=10) = p(V \cap M) = \frac{3}{50}$;

$p(X=50) = p(\overline{V} \cap M) = \frac{9}{20}$

Ainsi, la probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	10	50	Total
p_i	$\frac{49}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{9}{20}$	1

$E(X) = 0 \times \frac{49}{100} + 10 \times \frac{3}{50} + 50 \times \frac{9}{20} = \frac{231}{10} = 23{,}1$

23,100D est le coût moyen de soin par personne.

Exercice 4 *(6 points)*

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+1} = 0$ donc la droite (D) d'équation y = x +1 est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

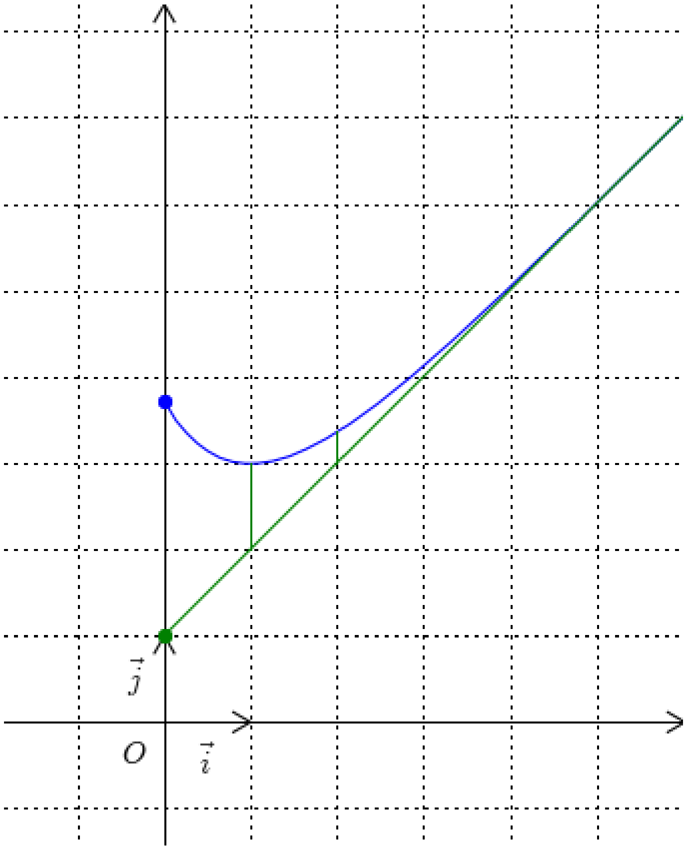
2. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 1 - e^{-x+1}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x+1} = 1 \Leftrightarrow -x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x+1} < 1 \Leftrightarrow -x+1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	
f(x)	1+ e	↘	3	↗	$+\infty$

3.



4. f est continue et strictement décroissante sur [0,1] donc $f([0,1]) = [1+e, 3]$.
Comme $4 \notin [1+e, 3]$ alors l'équation f(x) = 4 n'admet pas de solution dans [0,1].
f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc $f([1, +\infty[) = [3, +\infty[$.
Comme $4 \in [3, +\infty[$ alors l'équation f(x) = 4 admet une unique α dans $[1, +\infty[$.

f(2,84) = 3,99 < 4 et f(2,86) = 4,01 > 4 , donc 3,99 < α < 4,01.

5. $A = \int_0^1 e^{-x+1}dx = -\left[e^{-x+1}\right]_0^1 = -(1-e) = e-1.$