Lycée IBN KHALDOUN - RADES ❖❖❖ *DEVOIR DE CONTROL E N°2* ❖❖❖ Mr ABIDI Farid	CLASSE : 4^e **Sciences Expérimentales 1**
	EPREUVE ***MATHEMATIQUES***
	Durée : ***2h*** — *Date* : 01-02-2010

Exercice 1 : (3 points)

1. L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On donne trois réels α, β et γ strictement positifs. La distance du point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ au plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est :

   a) γ ; b) β ; c) α .

2. La fonction f est définie est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Son tableau de variation est le suivant :

x	-1		3		5		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	2	↗	4	↘	$-\infty$

   a) $\int_3^5 f(x)dx < 2$; b) $2 \leq \int_3^5 f(x)dx \leq 4$; c) $\int_3^5 f(x)dx > 4$

3 . Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. L'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction f : $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$, l'axe des abscisses , l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1 est égal à :

   a) $-\frac{1}{2}$; b) 0 ; c) $\frac{1}{2}$

Exercice 2: (7 points)

Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)dx$.

1. a) Calculer $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)dx$.

   a) Montrer que $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x.\sin(3x)dx = \frac{1}{9}$.

2. Sans calculer l'intégrale u_n :

   a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. a) En effectuant deux intégration par parties successives, montrer que :

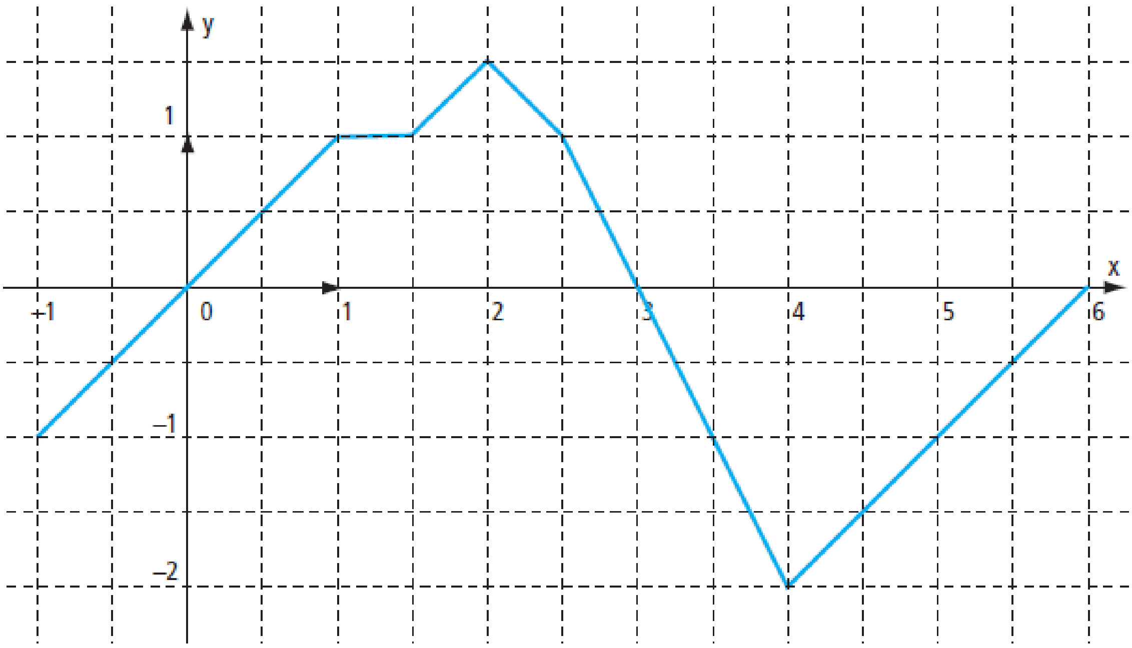
$$u_{n+2} = \frac{n+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)u_n\right).$$

b) Calculer alors u_2 et u_3.

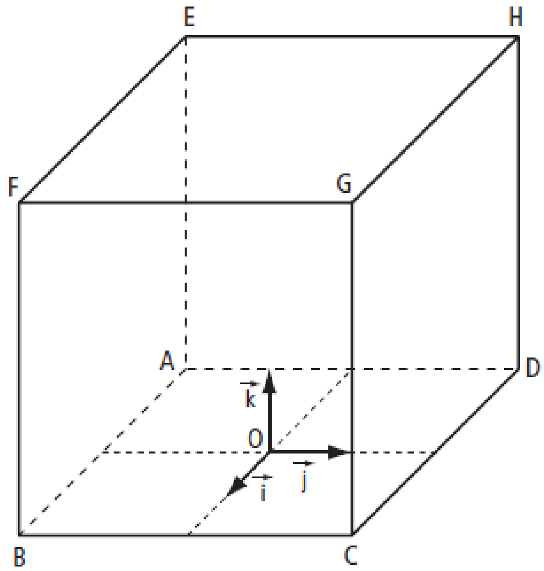
<u>Exercice 2 :</u> (4 points)

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle [-1 , 6].

1. Calculer les intégrales suivantes A = $\int_{-1}^{6} f(t)dt$ et B = $\int_{-1}^{2} f(t)dt$.
2. Trouver un réel c de [4 , 6] tel que $\int_{-1}^{c} f(t)dt = 0$.



Exercice 4 : (6 point)



Dans la figure ci-dessus, ABCDEFGH est un cube d'arête 4 . On choisit le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthonormé direct de l'espace où O est le centre du carré ABCD. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [EH].

1. Déterminer les coordonnées des points A , I , J et F.
2. a) Calculer l'aire du triangle AIJ.

   b) Montrer que le volume du tétraèdre AFIJ est $\mathcal{V} = \frac{32}{3}$.

   c) En déduire la distance du point F au plan (AIJ).

3. Soit (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire au plan (AIJ).

   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

   b) Calculer la distance du point A à la droite (Δ).

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) ; 2.c) ; 3.c)

Exercice 2 :

1. a) $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$.

b) On a : $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x \, dx$

On pose f(x) = x , f'(x) = 1

g'(x) = sin 3x , $g(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$

On obtient : $u_1 = \left[-\frac{x}{3}\cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$.

2. a) $0 \le x \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le x \le 1$ et comme pour tout entier naturel n, $x^n \ge 0$ alors

$0 \le x^n.x \le x^n \Leftrightarrow 0 \le x^{n+1} \le x^n$.

D'autre part : pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$, $\sin 3x \ge 0$.

Il en suit : $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \sin 3x \, dx \le \int_0^{3x} x^n \sin 3x \, dx \Leftrightarrow 0 \le u_{n+1} \le u_n$.

Il en résulte : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

b) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ donc $0 \le \sin x \le \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \le \sin x \le \frac{1}{2}$ d'où $0 \le \sin x \le 1$.

Or pour tout n de $\mathbb{N}$, $x^n \ge 0$, donc $0 \le x^n \sin 3x \le x^n$.

Par suite : $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin x \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx \Leftrightarrow 0 \le u_n \le \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}$.

Comme $\frac{\pi}{6} \le 1$, alors $\left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} \le 1$. Par conséquent : $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ entraine $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. a) On a : $u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2} \sin 3x\,dx$;

On pose : $f_1(x) = x^{n+2}$	$f_1'(x) = (n+2)\cos^{n+1} x$
$g_1(x) = \sin 3x$	$g_1'(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$

On obtient : $u_{n+2} = -\frac{1}{3}\left[x^{n+2}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{n+2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2}\sin 3x\,dx = \frac{n+2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2}\sin 3x\,dx$.

On pose : $f_2(x) = x^{n+1}$	$f_1'(x) = (n+1)\cos^{n} x$
$g_2(x) = \cos 3x$	$g_2'(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$

On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\left[x^{n+1}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{n+2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{3}u_n .$$

Par suite : $u_{n+2} = \frac{n+2}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{3}u_n\right] = \frac{n+1}{9}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^{+1} - (n+1)u_n\right]$.

b) $u_2 = \frac{2}{9}\left[\frac{\pi}{6} - u_0\right] = \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi - 2}{27}$.

$u_3 = \frac{3}{9}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 2u_1\right] = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{2}{9}\right) = \frac{\pi^2}{36} - \frac{2}{27}$.

Exercice 3 :

1. $A = \int_{-1}^{6} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{3} f(t)\,dt + \int_{3}^{6} f(t)\,dt$

A est égale à l'opposé de l'aire de la partie $\mathscr{D}_1$ plus l'aire de la partie $\mathscr{D}_2$ mois l'aire de la partie $\mathscr{D}_3$.

Ainsi : A = -0,5 + 2,5 – 3 = -1

B = $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(t)\,dt$ = -0,5 + 1,625 = 1, 125.

2. On a : $\int_{-1}^{4} f(t)\,dt = -0,5 + 2,5 - 1 = 1$ > 0 et $\int_{-1}^{6} f(t)\,dt < 0$.

Soit c appartenant à [4, 6], on a : $\int_{-1}^{c} f(t)\,dt = \int_{-1}^{4} f(t)\,dt + \int_{4}^{c} f(t)\,dt = 1 + \int_{4}^{c} f(t)\,dt$

On cherche donc c tel que $\int_4^c f(t)dt = -1$.

Sur l'intervalle [4, 6] , f(x) = x – 6. Le point de la courbe dont l'abscisse est a pour ordonnée c – 6 < 0 .

On en déduit : $\int_4^c f(t)dt$ est l'opposé de l'aire du trapèze de bases 2 et (6 – c) et de hauteur (c – 4) ; d'où

$$\int_4^c f(t)dt = -\frac{2+(6-c)}{2}(4-c) = -\frac{(8-c)(4-c)}{2} = \frac{c^2-12c+32}{2}$$

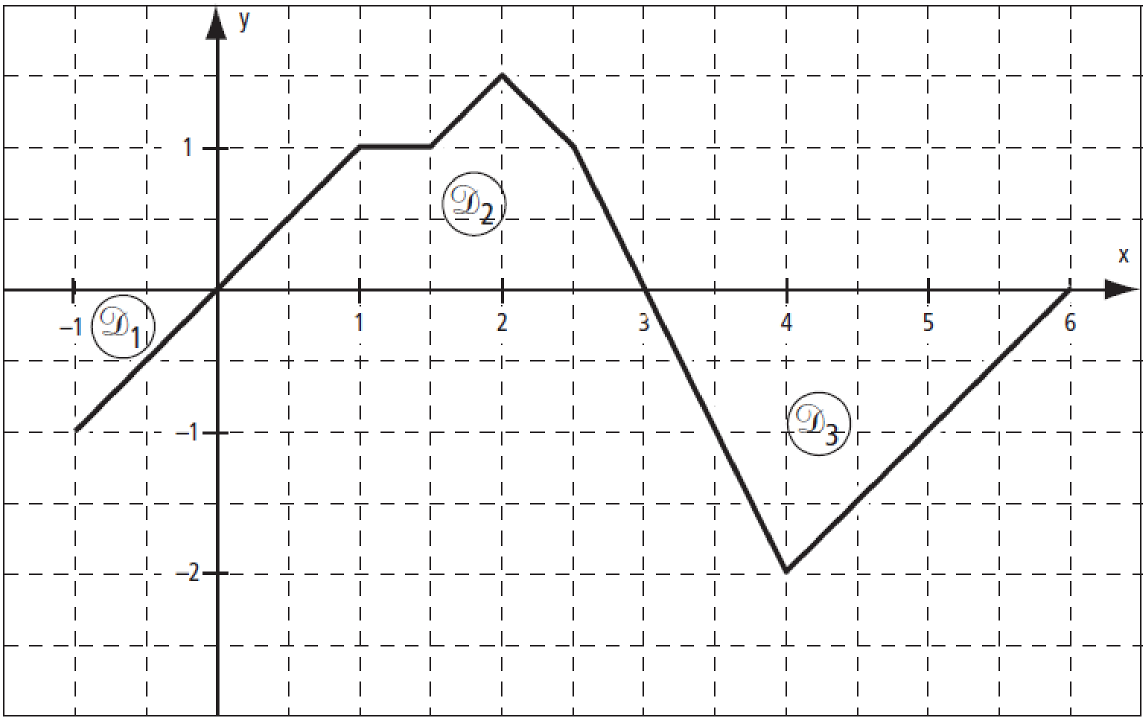
Ainsi c vérifie $\frac{c^2-12c+32}{2} = -1$ ou encore $c^2-12c+32=-2 \Leftrightarrow c^2-12c+34=0$.

Résolvons l'équation (E) : $c^2 - 12c + 34 = 0$ dans l'intervalle [4, 6] :

On a : $\Delta' = 6^2 - 34 = 2$.

L'équation (E) admet donc deux racines : $c_1 = 6-\sqrt{2} \simeq 4,58$ et $c_2 = 6+\sqrt{2} \simeq 7,41$.

Ainsi, $c = 6-\sqrt{2}$



Exercice 4 :

1. A(-2, -2, 0) , I(2, 0, 0) , J(-2, 0 , 4) et F(2, 0, 4).

2. a) L'aire du triangle AIJ est $\mathscr{A} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\right\|}{2}$.

Or $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}8\\-16\\8\end{pmatrix}$; il en résulte : $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{8^2+(-16)^2+8^2}}{2} = 4\sqrt{6}$.

b) Le volume du tétraèdre AFIJ est $\mathscr{V} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AF}.\left(\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\right)\right|}{6} = \dfrac{|32+0+32|}{6} = \dfrac{32}{3}$.

c) La distance de F au plan (AIJ) est d(F, (AIJ)) = $3\dfrac{\mathscr{V}}{\mathscr{A}} = \dfrac{32}{4\sqrt{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

3. a) $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}8\\-16\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) donc $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}8\\-16\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) d'où : $\Delta : \begin{cases} x = 2+8\alpha \\ y = -2-16\alpha \\ z = 4+8\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) la distance de O à la droite (Δ) est

$$d(O,\Delta) = \frac{\left\|\overrightarrow{OF}\wedge\left(\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\right\|} = \frac{\sqrt{48^2+48^2+(-16)^2}}{8\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{76}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{38}{3}} .$$