Exercice 1 : (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$, est :	strictement décroissante IR	strictement croissante sur sur IR	constante sur IR
2	Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale B(15 ; 0,2) alors $P(X > 0) =$	$0{,}2^{15}$	$1 - 0{,}2^{15}$	$1 - 0{,}8^{15}$
3	Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ alors $f''(x) =$	e^{-x^2}	$-2xe^{-x^2}$	$\int_0^x -2te^{-t^2}dt$

Exercice 2 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Résoudre l'équation f(x) = 0 .

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que O est un point d'inflexion de (C).

4) Ecrire une équation de la tangente (T) en O à (C).

6) Tracer (T) et (C).

7) Calculer l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations: x = 0 et x = ln3.

8) a- Montrer que f admet, sur $[\ln 2; +\infty[$, une fonction réciproque f^{-1}.

b- Montrer que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une solution unique α et vérifier que 1,2 < α < 1,3.

Exercice 3 : (7 points)

Une urne contient **trois** boules blanches et **deux** boules noires.

Un joueur tire **successivement** et **au hasard** trois boules de l'urne en respectant la règle suivante:

Pour chaque tirage : si la boule tirée est noire, il la remet dans l'urne ;

si elle est blanche, il ne la remet pas dans l'urne.

1) a- Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b-Montrer que la probabilité qu'il y ait une seule boule blanche parmi les trois boules tirées est égale à $\frac{183}{500}$.

2) Lors du tirage des trois boules, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur.

a- Montrer que les valeurs possibles de X sont : 6, 7, 8 et 9.

b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

3) Le joueur tire maintenant **successivement** et **au hasard** n boules de l'urne ($n > 3$) en respectant la même règle.

a- Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement : « le joueur tire n boules noires ».

b- Calculer, en fonction de n, la probabilité P_n de l'événement :

« le joueur tire au moins une boule blanche ».

c- Quel est le nombre minimal de boules que le joueur doit tirer pour que $P_n \geq 0{,}99$?

Corrigé

Exercice 1 :

1. a)

En effet : les fonctions $x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel , $f'(x) = -\ln\left(\frac{4}{3}\right).\left(\frac{4}{3}\right)^x + \ln\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Comme $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ et $-\ln\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ alors $f'(x) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.c)

En effet : $P(X>0) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-0,2)^{15} = 1-0,8^{15}$.

3. b)

En effet : f est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel , $f'(x) = e^{-x^2}$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel , $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

Exercice 2 :

Soit $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(e^x - 4\right) + 3 = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(e^x - 4\right) + 3 = +\infty$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$.

On pose $X = e^x$ où X > 0, on obtient : $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 3$.

Il en résulte : $e^x = 1$ ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$.

Ainsi, les solutions de l'équation f(x) = 0 sont $\{0, \ln 3\}$

2. Pour tout x réel, $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x\left(e^x - 2\right)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

Comme pour tout x réel, $2e^x>0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de e^x-2.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>2=0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$.

$f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+3=e^{\ln 4}-4\times 2+3=4-8+3=-1$

D'où le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout x réel, $f''(x)=4e^{2x}-4e^x=4e^x\left(e^x-1\right)$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ et $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

D'où le tableau de signe de $f''(x)$:

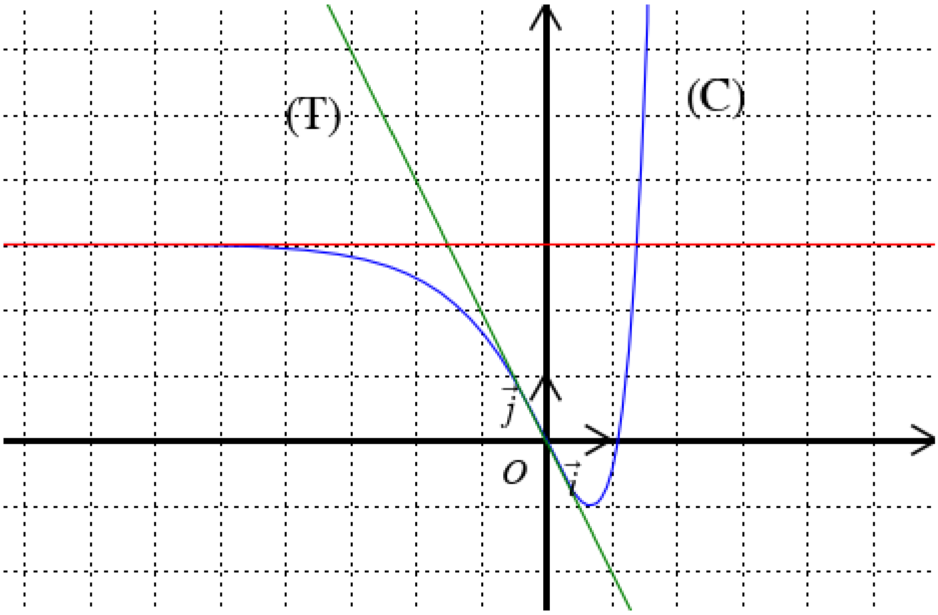
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Comme f(0) = 1- 4 + 3 = 0 alors O l'origine du repère est un point d'inflexion de (C).

4. On a : f(0) = 0 et $f'(0)=2-4=-2$ donc la tangente (T) à (C) en 0 est d'équation y = -2x.

5. La droite d'équation y = 3 est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

(C) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.



6. Sur l'intervalle $[0,\ln 3]$, $f(x)\le 0$ donc l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = $\ln 3$ est donnée par :

$$A=-\int_0^{\ln 3} f(x)dx\ ua=-\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}+3x\right]_0^{\ln 3} ua=\left(-\left(\frac{9}{2}-12+3\ln 3\right)+\left(\frac{1}{2}-4\right)\right)ua=(4-3\ln 3)ua$$

7. a) f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2,+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty[$.

b) Pour tout x de $[\ln 2,+\infty[$, $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0$.

La droite d'équation y = x coupe la courbe (C) en un seul point d'abscisse α.

Soit $g(x)=f(x)-x$, $g(1,2)=f(1,2)-1,2\approx -0,4$ et $g(1,3)=f(1,3)-1,3\approx 0,4$.

Donc l'équation $f(x)=f^{-1}(x)$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1,2;1,3[$.

Exercice 3 :

1. a) Soit A : « tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire et une boule blanche ».

P(A) = $\left(\frac{2}{5}\right)^2.\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$.

b) Soit B : « tirer une seule boule blanche parmi les trois boules tirées »

p(B)= p(A) + $\frac{2}{5}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}+\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{4}=\frac{75+60+48}{500}=\frac{183}{500}$.

2. a) Les tirages possibles sont : 3 boules blanches , 2 boules blanches et 1 boule noire , 1 boule blanches et 2 noires ou 3 boules noires.

Donc les valeurs prises par X sont : 6, 7 , 8 et 9.

b) p(X = 6) = $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$; p(X = 7) = p(B) = $\frac{183}{500}$; p(X= 8) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}+\frac{3}{5}.\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{2}{5}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}=\frac{47}{100}$;

p(X = 9) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$.

E(X) = $\frac{6\times 40+7\times 183+8\times 235+9\times 50}{500}=\frac{3851}{500}$

3. a) Soit C : « le joueur tire n boules noires ». P(C)= $\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

b) $P_n = 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

c) $P_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$.

Comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \approx 5,026$

Ainsi, le nombre minimal de boules que le joueur doit tirer pour que $P_n \geq 0,99$ est n = 6.