

♦♦♦

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EPREUVE **MATHEMATIQUES**

♦♦♦

Mr ABIDI Farid

Durée : 2h

Date : 09-12-2009

Exercice 1: (3 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

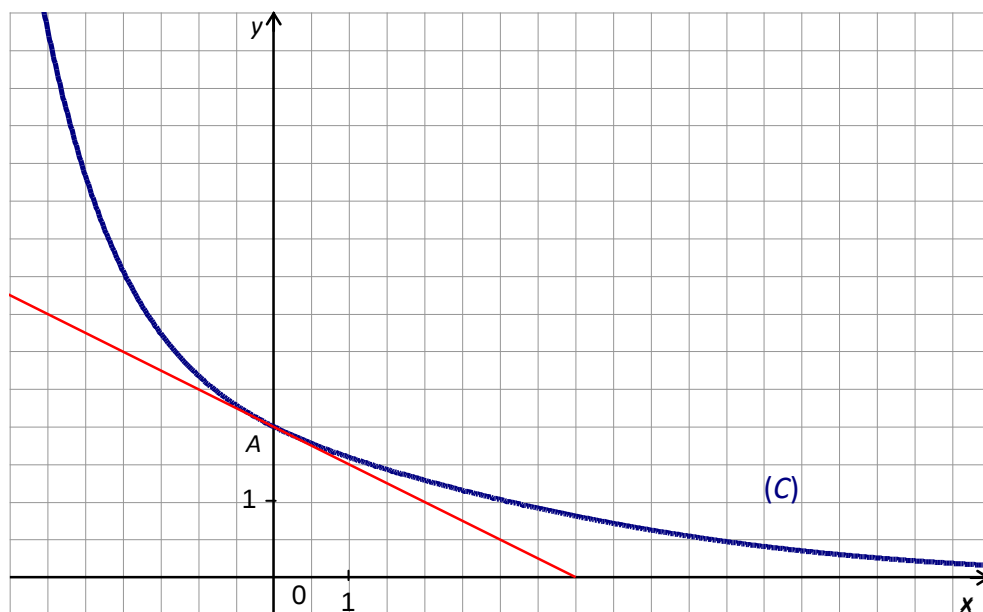
- Si (u_n) est une suite décroissante et converge vers 0 alors les suites (u_n) et $(-u_n)$ sont adjacentes.
- La courbe représentative dans un repère du plan de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ possède deux points d'inflexion.
- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ par $f(x) = \sqrt{2-x^2}$.

Alors pour tout x de $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{2-x^2}}$.

- Les racines cubiques de -1 sont : -1 , $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f . On sait que :

- la courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;2)$;
- la courbe (C) admet pour asymptote l'axe des abscisses ;
- la tangente en A à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.



- f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = -2$.

Exercice 2 : (6 points)

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(E) : z^2 + (1 - \sqrt{3} + 2i)z - (\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i = 0.$$

1. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(1 + \sqrt{3})^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 - i$, $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = 1 + \sqrt{3}$.
 - a) Placer, dans le plan complexe, les points A, B et C.
 - b) Montrer que le quadrilatère OABC est un parallélogramme.
 - c) Déterminer l'affixe du point Ω le centre de OABC.
 - d) Donner une mesure de l'angle $\left(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B} \right)$

Exercice 3 : (5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x$ et $g(x) = \frac{1}{6}(1 - x^3)$.

1. a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
2. a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$, $g(x) \in [0, 1]$. Puis vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.
 b) Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. On introduit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
 - b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
 - c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 : (6 points)

Le tableau suivant est le tableau de variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	-1	$+\infty$	1

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner les équations des asymptotes de (C).
3. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$?
4. Comparer, en justifiant, $f(2)$ et $f(3)$.
5. Ecrire une équation de la tangente à (C) au point $A(0; -1)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{x^2 + b}$.

1. En utilisant le tableau de variations de f , montrer que $a = 1$ et $b = -1$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Solution**Exercice 1:**

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Faux.

Exercice 2 :

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(E) : z^2 + (1 - \sqrt{3} + 2i)z - (\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i = 0.$$

1. Le discriminant de l'équation (E) est

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3} + 2i)^2 + 4[(\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i] &= (1 - \sqrt{3})^2 - 4 + 4i(1 + \sqrt{3}) + 4(1 + \sqrt{3}) - 4(1 - \sqrt{3})i \\ &= (1 - \sqrt{3})^2 - 4 + 4(1 + \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = (1 + \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

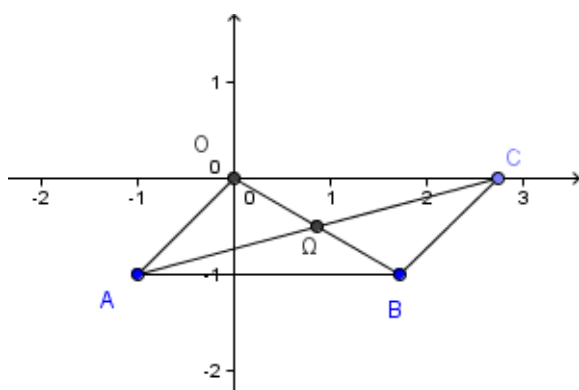
3. Les racines de l'équation (E) sont :

$$\frac{-(1 - \sqrt{3} + 2i) - (1 + \sqrt{3})}{2} = -1 - i \quad \text{et} \quad \frac{-(1 - \sqrt{3} + 2i) + (1 + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{3} - i.$$

On notera $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B et C les points d'abscisses respectives $z_A = -1 - i$, $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = 1 + \sqrt{3}$.

a)



b) On a $z_{\vec{OC}} = z_C = 1 + \sqrt{3}$ et $z_{\vec{AB}} = z_B - z_C = \sqrt{3} + 1$ donc $\vec{OC} = \vec{AB}$ d'où le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

c) L'abscisse du point Ω le centre de OABC est $z_{\Omega} = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

$$d) \left(\widehat{\Omega A, \Omega B} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} \right) [2\pi] ;$$

$$\begin{aligned} \text{or } \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} &= \frac{\sqrt{3} - i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{-1 - i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{-\frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} = -\frac{\sqrt{3} - i}{(2 + \sqrt{3}) + i} = -\frac{(\sqrt{3} - i)[(2 + \sqrt{3}) - i]}{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} \\ &= -\frac{(2 + 2\sqrt{3}) - i(2 + 2\sqrt{3})}{4(2 + \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})}(-1 + i) \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \frac{1 + \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})} > 0 \text{ alors } \left(\widehat{\Omega A, \Omega B} \right) \equiv \arg(-1 + i)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\Omega A, \Omega B} \right) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Exercice 3 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x$ et $g(x) = \frac{1}{6}(1 - x^3)$.

1. a) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme pour tout x réel, on a :

$f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) On $f(0) = 0$, $f(\alpha) = 1$ et $f(1) = 7$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $0 < \alpha < 1$.

$$2. a) 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^3 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x^3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x^3 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{6}(1 - x^3) \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{6}$$

et puisque $\frac{1}{6} \leq 1$ alors $g(x) \in [0, 1]$.

On a : $g(\alpha) = \frac{1}{6}(1 - \alpha^3)$. Or $f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 + 6\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 - 6\alpha$; il en résulte que

$$g(\alpha) = \frac{1}{6}(1 - (1 - 6\alpha)) = \frac{1}{6}(6\alpha) = \alpha.$$

b) Pour tout x de $[0, 1]$, $g'(x) = \frac{1}{6}(-3x^2) = -\frac{1}{2}x^2 \leq 0$ donc $|g'(x)| = \frac{1}{2}x^2$ et comme

$0 \leq x \leq 1$ alors $x^2 \leq 1$ donc $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

3. On introduit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) On a : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme $u_n \in [0,1]$ alors $u_{n+1} = g(u_n) \in [0,1]$. Par suite, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

b) la fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc pour tout x de $[0, 1]$, $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \Leftrightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Et comme pour tout entier n , $u_n \in [0,1]$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ ou encore $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) On a :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$$

$\vdots$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$$

d'où par produit membre à membre :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par suite la suite (u_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$