

\*\*\*  
**DEVOIR DE SYNTHESE N° 2**

EPREUVE **MATHEMATIQUES**

\*\*\*  
 Mr ABIDI Farid

Durée : 3 h

Date : 03-03-2010

**EXERCICE 1** (3 points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La primitive  $H$  de la fonction  $h$  définie pour tout réel  $x$  par  $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$  telle que  $H(0) = -1$  est la fonction  $H$  définie pour tout réel  $x$  par :

a)  $H(x) = \frac{1}{x^2+1} - 2$

b)  $H(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{e}\right)$

c)  $H(x) = \ln\left(\frac{e}{x^2+1}\right) - 2$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On fait tourner autour de l'axe des abscisses

l'arc de la courbe  $(C)$  d'équation  $y = \sqrt{x}$  constitué des points de  $(C)$ , d'abscisses comprises entre 0 et

1. Le solide ainsi engendré a pour volume :

a)  $\frac{\pi}{2}$

b)  $\pi$

c)  $2\pi$

3. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants et si  $p(A) = p(B) = 0,4$  alors :

a)  $p(A \cap B) = 0,8$

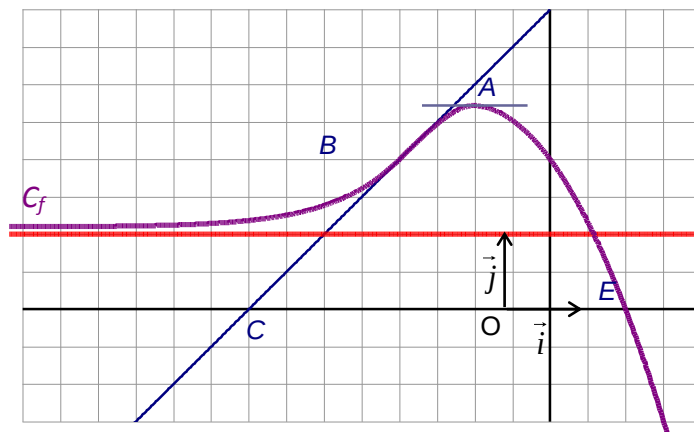
b)  $p(A \cup B) = 0,64$

c)  $p(A \cup B) = 0,8$

**EXERCICE 2** (6 points)

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Les points  $E(1; 0)$ ,  $A(-1; e)$  et  $B(-2; 2)$  sont des points de  $C_f$ .
- La tangente à  $C_f$  en  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à  $C_f$  en  $B$  passe par  $C(-4; 0)$ .
- La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $C_f$  en  $-\infty$ .
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$  et strictement décroissante sur  $[-1; +\infty[$ .



1. a) Donner les valeurs de  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$  ainsi que la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
 b) Donner, en justifiant vos réponses, les nombres  $f'(-1)$  et  $f'(-2)$ .

2. On pose pour tout  $x$  réel,  $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$ .

a) Déterminer  $g'(x)$  pour tout  $x$  réel.

b) En déduire la valeur de l'intégrale :  $\int_{-2}^{-1} [f''(x) \cdot f(x) + (f'(x))^2] dx$ .

3. Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \ln[f(x)]$  et  $C_h$  sa représentation graphique.

a) Déterminer l'intervalle  $I$  de définition de  $h$ . Calculer les limites de  $g$  aux bornes de  $I$ .

En déduire les asymptotes à la courbe  $C_h$  en précisant une équation pour chacune d'elles.

b) Exprimer  $h'(x)$  à l'aide de  $f(x)$  et  $f'(x)$ . En déduire le tableau de variations de  $h$ .

c) Déterminer  $h(-2)$  et  $h'(-2)$ , puis une équation de la tangente à  $C_h$  au point  $B'$  d'abscisse  $-2$ .

4. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \int_{-n-1}^{-n} h(x) dx$ .

a) Donner une interprétation graphique de  $U_n$ .

b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$ .

c) Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.

### EXERCICE 3 (6 points)

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $A(3, -2, 2)$ ,  $B(6, 1, 5)$ ,  $C(6, -2, -1)$  et  $D(0, 4, -1)$ .

1. Déterminer le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et en déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

b) Déterminer le volume  $V$  du tétraèdre  $ABCD$ .

3. a) Ecrire une équation cartésienne du plan  $(P_1)$  perpendiculaire à la droite  $(AC)$  passant par  $A$ .

b) Vérifier que le plan  $(P_2)$  d'équation  $x + y + z - 3 = 0$  est perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et passe par  $A$ .

4. a) Ecrire une équation de la sphère  $(S)$  de centre  $B$  et de rayon  $R = 5\sqrt{3}$ .

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $(L) = S \cap P_2$ .

**EXERCICE 4** (5 points)

L'urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.

L'urne B contient deux boules rouges et deux noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose aussi d'un dé, parfaitement équilibré, à six faces numérotée de 1 à 6.

On le lance une fois :

- ✓ s'il tombe sur une face dont le numéro est multiple de 3, on tire au hasard une boule de A ;
- ✓ sinon, on tire au hasard une boule de l'urne B.

- a) Calculer la probabilité de l'évènement N : « obtenir une boule noire ».
- b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
- c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne.

a) Montrer que la probabilité de l'évènement E : « la troisième boule tirée est noire » vaut  $\frac{1}{4}$ .

b) Certains pensent que l'évènement F : « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à celle de l'évènement E.

Est-ce vrai ? Justifier.

**CORRIGE****EXERCICE 1 :**1. **b)** ; 2. **a)** ; 3. **b)****EXERCICE 2 :**1. a)  $f(-2) = 2$  ,  $f(-1) = e$  ,  $f(1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ 

b) Le nombre dérivé  $f'(-1)$  est le coefficient de la tangente à la courbe  $C_f$  au point A . Or la tangente à  $C_f$  au point A est parallèle à l'axe des abscisses donc  $f'(-1) = 0$  .

Le nombre dérivé  $f'(-2)$  est le coefficient de la tangente à la courbe  $C_f$  au point B . Or la tangente à  $C_f$  au point B(-2, 2) passe par le point C(-4, 0). Donc  $f'(-2) = \frac{0-2}{-4-(-2)} = 1$  .

2. On pose pour tout x réel,  $g(x) = f'(x).f(x)$ .a) Pour tout x réel,  $g'(x) = f''(x).f(x) + (f'(x))^2$ b)  $\int_{-2}^{-1} [f''(x).f(x) + (f'(x))^2] dx = [f'(x).f(x)]_{-2}^{-1} = f'(-1).f(-1) - f'(-2).f(-2) = -2$  .

3.a) La courbe  $C_f$  traverse l'axe des abscisses au point E(1, 0) . D'autre part,  $C_f$  est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $] -\infty, 1[$  . Il en résulte que : pour tout x de  $] -\infty, 1[$  ,  $f(x) > 0$  . Par suite, l'intervalle de définition de h est  $I = ] -\infty, 1[$  .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$  .

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$  .

On en déduit :

- ✓ la droite des abscisses est asymptote à  $C_h$  au voisinage de  $-\infty$  .
- ✓ La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe  $C_h$  .

b) Pour tout x de I,  $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  .Le signe de  $h'(x)$  sur I est celui de  $f'(x)$  .

D'où le tableau de variations de g est :

| x       | $-\infty$ | -1                   | 1                  |
|---------|-----------|----------------------|--------------------|
| $h'(x)$ | +         | 0                    | -                  |
| h(x)    | 0         | $\nearrow \ln e = 1$ | $\searrow -\infty$ |

$$c) h(-2) = \ln[f(-2)] = \ln 2 \quad \text{et} \quad h'(-2) = \frac{f'(-2)}{f(2)} = \frac{1}{2}.$$

Une équation de la tangente à  $C_h$  au point  $B'$  d'abscisse -2 est :

$$y = h'(-2)(x+2) + h(2) = \frac{1}{2}(x+2) + \ln 2 = \frac{1}{2}x + 1 + \ln 2.$$

4. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \int_{-n-1}^{-n} h(x) dx$ .

a) Pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $h$  est continue et positive sur  $[-n-1, -n]$  donc  $U_n$  est l'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe  $C_h$ , la droite des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = -n$  et  $x = -n-1$ .

b) Soit  $n$  un entier naturel, la fonction  $h$  est croissante sur  $[-n-1, -n]$ , il en résulte :

$$-n-1 \leq x \leq -n \Rightarrow h(-n-1) \leq h(x) \leq h(-n) \quad \text{donc} \quad h(-n-1) \int_{-2}^{-1} dx \leq \int_{-2}^{-1} h(x) dx \leq h(-n) \int_{-2}^{-1} dx$$

Ainsi, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$ .

c) On a : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(-n-1) = 0$  donc la suite  $(U_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ .

### EXERCICE 3

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $A(3, -2, 2)$ ,  $B(6, 1, 5)$ ,  $C(6, -2, -1)$  et  $D(0, 4, -1)$ .

1. On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -9 \end{pmatrix}$ .  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  donc les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  et par suite le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

b) Le volume  $V$  du tétraèdre  $ABCD$  est  $V = \frac{1}{6} \left| \left( \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} |27 + 108 + 27| = 27$ .

3. a) Soit  $(P_1)$  le plan perpendiculaire à la droite  $(AC)$  passant par  $A$ .

$\vec{AC}$

est un vecteur normal à  $(P_1)$  donc  $(P_1) : 3x - 3z + d = 0$  où  $d$  est un réel.

Or  $A(3, -2, 2) \in (P_1)$ , alors on obtient  $d = -3$ .

Il en résulte :  $(P_1) : 3x - 3z - 3 = 0$  ou encore  $(P_1) : x - z - 1 = 0$ .

b) Soit  $(P_2)$  le plan d'équation  $x + y + z - 3 = 0$ ,  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $(P_2)$ . On

remarque :  $\vec{AB} = 3\vec{n}$ . Ce qui entraîne :  $(P_2)$  est perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et passe par  $A$ .

4. a) Soit  $(S)$  la sphère de centre  $B$  et de rayon  $R = 5\sqrt{3}$ .

Une équation de  $(S)$  est :  $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 75$ .

b) Soit  $(L) = S \cap P_2$ .

$d(B, P_2) = \frac{|6-2-1-3|}{\sqrt{3}} = 0 < R$  donc  $B \in (P_2)$  d'où  $(L)$  est un grand cercle c'est-à-dire un cercle

de centre  $B$  et de rayon  $R = 5\sqrt{3}$ .

Exercice 4 :

L'urne  $A$  contient une boule rouge et trois boules vertes.

L'urne  $B$  contient deux boules rouges et deux noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On note  $A$  l'évènement « on tire la boule de l'urne  $A$  »,  $B$  l'évènement « on tire la boule de  $B$  »

$N$  l'évènement « la boule tirée est noire »,  $R$  l'évènement « la boule tirée est rouge »

$V$  l'évènement « la boule tirée est verte ».

On en déduit :  $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  et  $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

a)  $p(N) = p(N \cap A) + p(N \cap B) = p(A) \cdot p(N|A) + p(B) \cdot p(N|B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .

$$b) p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = p(A) \cdot p(R|A) + p(B) \cdot p(R|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

$$P(V) = p(V \cap A) + p(V \cap B) = p(A) \cdot p(V|A) + p(B) \cdot p(V|B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{4}.$$

On a ainsi :  $P(R) > p(N) > p(V)$  donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir est rouge.

$$c) p(B|R) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p(R|B)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}.$$

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne. L'urne au départ contient 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.

a) Soit l'évènement E : « la troisième boule tirée est noire ».

| Les cas possibles                                                             | Leur probabilité :                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| La première est noire, la deuxième n'est pas noire et la troisième est noire  | $\frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}$ |
| La première n'est pas noire, la deuxième est noire et la troisième est noire. | $\frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}$ |
| La première et la deuxième boules ne pas noires, la troisième est noire       | $\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}$ |

$$\text{Donc } p(E) = 2 \times \frac{1}{28} + \frac{5}{28} = \frac{1}{4}.$$

b) La probabilité l'évènement F : « la première boule tirée est noire » est  $p(F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$

Donc  $P(E) = p(F).$

Non, les deux probabilités sont égales.