

**Exercice 1** ( 4 points)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $] -\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$  vérifiant  $f(0) = 0$  et dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
Variations de f				

Dans chaque question une seule réponse est exacte. Donner son numéro et la lettre correspondante.

1. L'équation  $f(x) = 0$

A	B	C
n'admet aucune solution	admet exactement une solution	admet deux solutions

2. Soit  $a$  un réel fixé de l'intervalle  $] 1 ; 4[$ , l'équation  $f(x) = a$

A	B	C
admet exactement une seule solution	admet exactement deux solutions	admet exactement trois solutions

3. La courbe représentative de  $f$

A	B	C
admet une seule asymptote	admet exactement trois asymptotes	admet deux asymptotes verticales

4. L'image de l'intervalle  $[0 ; +\infty [$  par  $f$  est

A	B	C
$[0 ; 1[$	$[0, 4]$	$]1,4]$

**Exercice 2** (3 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$ .

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \cdot \cos x$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n\pi$ .

a) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(u_{2n}) = 2n\pi$  et  $f(u_{2n+1}) = -(2n+1)\pi$ .

b) La fonction  $f$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?

**Exercice 3** (4 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 4)$ .

1. a) Etudier les variations de  $f$ .  
b) En déduire que : si  $x$  appartient à l'intervalle  $]1, 4[$  alors  $f(x)$  appartient à  $]1, 4[$ .
2. Soit la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_0 = 3$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = f(v_n)$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $1 < v_n < 4$ .
  - b) Prouver que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(v_n - 1)(v_n - 4)$ .
  - c) En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente.

**Exercice 4** (4 points)

1. Déterminer  $z_1$  et  $z_2$  les racines carrées du nombre complexe  $8i$ .
2. a) Déterminer les nombres complexes  $b$  et  $c$  tels que pour tout complexe  $z$ , on ait :
$$z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z - 3i)(z^2 + bz + c).$$
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = 0$ .
  - c) Vérifier que la somme des solutions de (E) est imaginaire pure et que leur produit est réel.

**Exercice 5** (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et  $-1$ . Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre A et de rayon 1. Soit M un point du plan complexe privé de O d'affixe  $z = 1 + e^{2i\theta}$  où  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

1. Calculer le module de  $(z - 1)$ . En déduire que M appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $\theta$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $z = 2\cos\theta \cdot e^{i\theta}$ .
3. Soit M' le point d'affixe  $z'$  telle que  $z' = \frac{1}{2\cos\theta} e^{i(\pi+\theta)}$ .
  - a) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
  - b) Prouver que  $|z' + 1| = |z'|$  puis en déduire que M' décrit une droite (D) que l'on déterminera.
4. On suppose que  $\theta = \frac{3\pi}{8}$ , placer les points A, B, M et M' dans le plan complexe.  
(On prendra 2 cm pour unité graphique).

Exercice 1 : ( 4 points)

1. B ; 2. C ; 3. B ; 4. B

Exercice 2 : ( 3 points)

1. a) Pour tout x réel ,
- $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$
- .

b) Pour tout x réel ,  $2 - \cos x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$ .

D'où pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 - \cos x} \leq x$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x} = +\infty$ .

2. a) Pour tout n de
- $\mathbb{N}$
- ,

$f(u_{2n}) = 2n\pi \cos(2n\pi) = 2n\pi$  et

$f(u_{2n+1}) = (2n+1)\pi \cos((2n+1)\pi) = (2n+1)\pi \cos \pi = -(2n+1)\pi$

b) On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{2n}) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{2n+1})$

donc la fonction f n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

Exercice 3 : (4 points)

1. a)
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- .

f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout x réel,  $f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)$ .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

- b) Comme f est continue et strictement croissante sur
- $[1, +\infty[$
- alors :

$1 < x < 4 \Rightarrow f(1) < f(x) < f(4) \Leftrightarrow 1 < f(x) < 4$ .

2. a) On a :
- $v_0 = 3$
- donc
- $1 < v_0 < 4$
- .

On suppose que :  $1 < v_n < 4$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , et on montre que  $1 < v_{n+1} < 4$ .

$v_n \in ]1, 4[ \Rightarrow f(v_n) = v_{n+1} \in ]1, 4[$ .

On conclue: pour tout n de  $\mathbb{N}$ ,  $1 < v_n < 4$ .

- b) Pour tout n de
- $\mathbb{N}$
- ,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(v_n^2 - 2v_n + 4) - v_n = \frac{1}{3}(v_n^2 - 5v_n + 4) = \frac{1}{3}(v_n - 1)(v_n - 4)$$

- c) Comme pour tout n de
- $\mathbb{N}$
- ,
- $v_n \in ]1, 4[$
- alors
- $v_{n+1} - v_n < 0$
- ; il en résulte que la suite
- $(v_n)$
- est décroissante. Or la suite
- $(v_n)$
- est minorée par 1, alors la suite
- $(v_n)$
- est convergente.

Remarquer que dans l'énoncé du devoir, la limite de la suite  $(v_n)$  n'est pas demandée.

Pendant, comment répondre à la question si elle était posée ?

Soit  $\ell$  la limite de la suite  $(v_n)$ , il vérifie :  $1 \leq \ell \leq 4$  et  $\ell = f(\ell)$ .

L'équation  $\ell = f(\ell)$  est équivalente à l'équation  $\ell^2 - 5\ell + 4 = 0$  d'où  $\ell = 1$  ou  $\ell = 4$ .

D'autre part, la suite  $(v_n)$  est décroissante donc  $(v_n)$  est majorée par son premier terme  $v_0$ .

Par suite : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n \leq v_0 \Leftrightarrow v_n \leq 3$ . Il en résulte que :  $1 \leq \ell \leq 3$ .

On conclue que :  $\ell = 1$ .

Exercice 4 : (4 points)

1.  $8i = 4 \cdot 2i = 2^2(1+i)^2 = (2+2i)^2$  donc les racines carrées de  $8i$  sont  $z_1 = 2+2i$  et  $z_2 = -2-2i$ .

NB : il en y'a bien d'autre méthode.

2. a)  $z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z-3i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b-3i)z^2 + (c-3ib)z - 3ic$

$$\text{D'où } \begin{cases} b-3i = -3i \\ c-3ib = -8i \\ -3ic = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -8i \end{cases}$$

b) (E)  $\Leftrightarrow (z-3i)(z^2 - 8i) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$  ou  $z^2 = 8i \Leftrightarrow z = 2+2i$  ou  $z = -2-2i$ .

Ainsi l'ensemble de solutions de l'équation (E) est  $\{3i, 2+2i, -2-2i\}$ .

c)  $3i + 2+2i + -2-2i = 3i$  et  $3i(2+2i)(-2-2i) = 24$

Exercice 5 : (5 points)

1.  $|z-1| = |e^{2i\theta}| = 1$  par conséquent  $AM = 1$  donc  $M \in (\mathcal{C})$ .

2. Pour tout  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $z = 1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\cos\theta e^{i\theta}$ .

3. a)  $\frac{z'}{z} = \frac{1}{4\cos^2\theta} \frac{e^{i(\theta+\pi)}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{4\cos^2\theta} e^{i\pi} = -\frac{1}{4\cos^2\theta}$  donc  $\frac{z'}{z}$  est réel par suite les vecteurs  $\overline{OM'}$  et  $\overline{OM}$  sont colinéaires d'où les points O, M et M' sont alignés.

$$\text{b) } |z'+1| = \left| -\frac{e^{i\theta}}{2\cos\theta} + 1 \right| = \left| \frac{-e^{i\theta} + 2\cos\theta}{2\cos\theta} \right| = \left| \frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta} \right| = \frac{1}{2\cos\theta} = |z'|$$

D'où  $BM' = OM'$  donc M décrit la médiatrice (D) du segment [OB].

4. Si  $\theta = \frac{3\pi}{8}$  alors  $z = 1 + e^{\frac{3i\pi}{4}}$  d'où  $\arg(z-1) \equiv \arg\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{u, AM}\right) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ .

$$\{M'\} = (OM) \cap D.$$

