Exercice 1 (QCM) **(3 points)**

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la grille jointe en fin d'énoncé. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Vous devez recopier la grille et inscrire **V** (vrai) ou **F** (faux) dans la case correspondante à la réponse. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent 0,50 point.

ABCDEFGH est un cube tel que AB = a où a > 0, O est le milieu du segment [AG] et l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(D, \frac{\overrightarrow{DA}}{a}, \frac{\overrightarrow{DC}}{a}, \frac{\overrightarrow{DH}}{a}\right)$.

1. La distance de A à la droite (BD) est égale à :

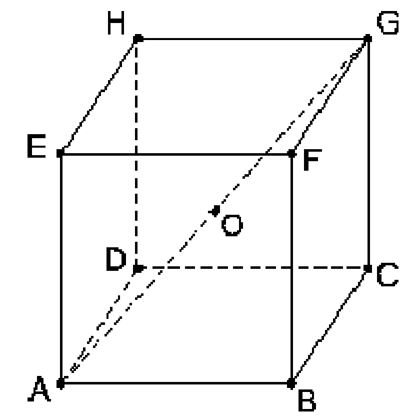
$\boxed{A}$ a ; $\boxed{B}$ $\frac{a}{\sqrt{2}}$; $\boxed{C}$ $\frac{a}{2}$

2. L'aire du triangle ADO vaut :

$\boxed{A}$ $\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$; $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$; $\boxed{C}$ $\frac{a^2}{4}$

3. Le volume du tétraèdre ABDH vaut :

$\boxed{A}$ $\frac{a^3}{2}$; $\boxed{B}$ $\frac{a^3}{3}$; $\boxed{C}$ $\frac{a^3}{6}$



Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
1			
2			
3			

Exercice 2 **(6 points)**

Un magasin vend 1000 pochettes en cuir parmi lesquelles certaines sont défectueuses. Ces pochettes sont fabriquées par trois usines U$_1$, U$_2$ et U$_2$ selon le tableau suivant :

	Usine U$_1$	Usine U$_2$	Usine U$_3$
Nombre de pochettes	200	350	450
Pourcentage de pochettes défectueuses	5%	4%	2%

On choisit au hasard une pochette de ces 1000 pochettes et on considère les événements suivants :

A : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U$_1$ ».
B : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U$_2$ ».
C: « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U$_3$ ».
D : « La pochette choisie est défectueuse ».

1. Dessiner l'arbre de probabilité correspondant à cette épreuve.

2. a) Prouver que la probabilité P $(D\cap A)$ est égale à $\frac{1}{100}$.

b) Calculer les probabilités suivantes : P $(D\cap B)$, P $(D\cap C)$ et P (D).

3. Sachant que la pochette choisie n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par l'usine U$_1$?

4. La pochette est vendue à 50 Dinar si elle est produite par l'usine A, à 60 Dinar si elle

est produite par l'usine U_2 et à 80 Dinar si elle est produite par l'usine U_3.

Une réduction (**solde**) de 30 % est faite sur le prix de chaque pochette défectueuse.

On désigne par X la variable aléatoire égale au prix final d'une pochette choisie au hasard.

a) Montrer que les valeurs de X sont 35, 42, 50, 56, 60 et 80.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3 (5 points)

On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) Montrer que vérifie l'équation différentielle (E') : z' = z et déterminer z en fonction de x.

2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie f(0) = 0.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).

b- Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (D).

4) a- Vérifier, en utilisant la question 2. , que pour tout x réel, $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

Exercice 4 (6 points)

La figure ci-dessous, montre la courbe représentative (Γ), dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2\ln x$.

1- a) Montrer par calcul que : $3{,}51 < \alpha < 3{,}52$.

b) Donner, en utilisant le graphique, le signe de h(x) sur $]0;+\infty[$

2- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

a) Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{4\ln x}{x^3}$.

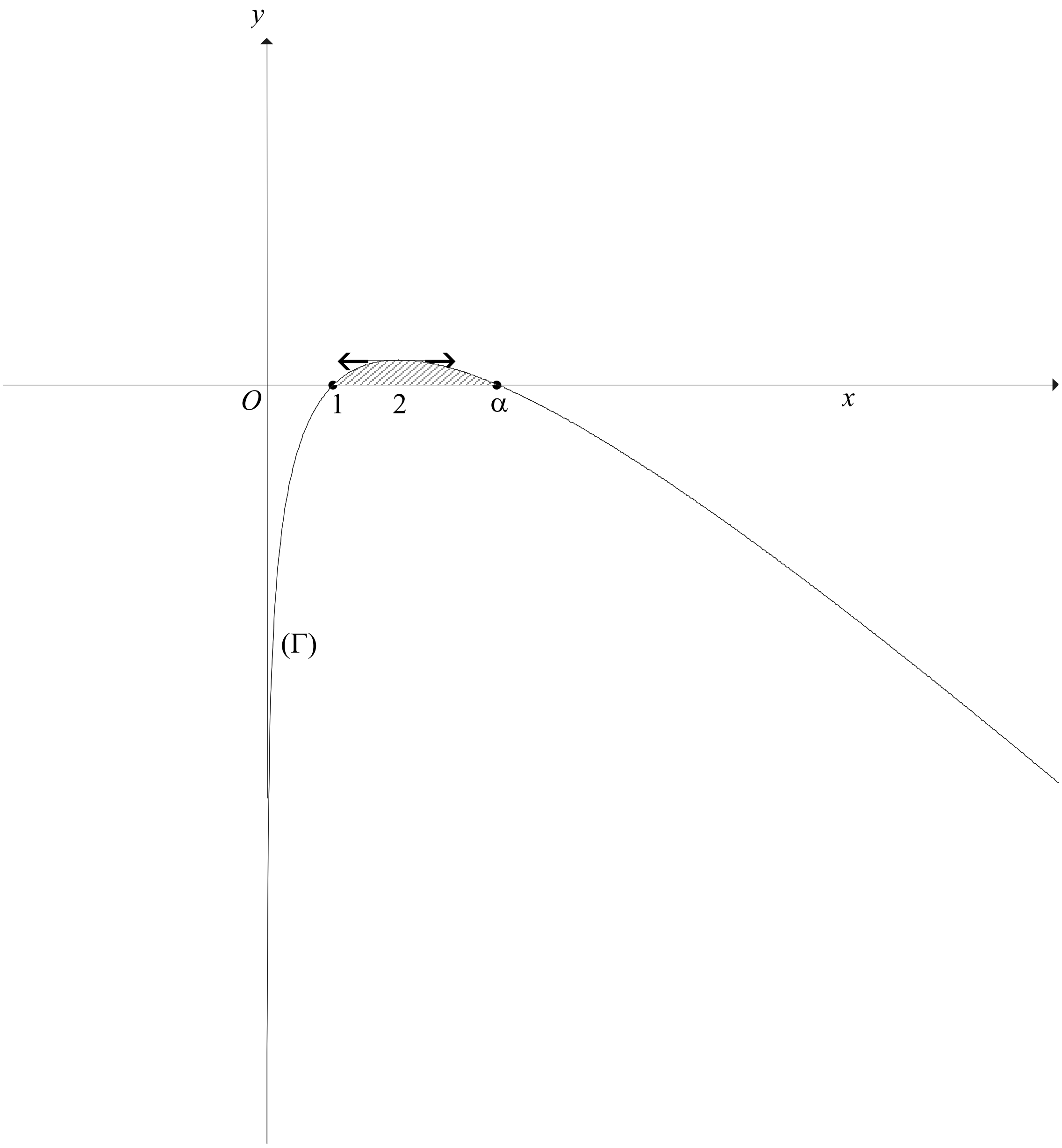
b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

3- Soit (I_n) la suite définie, pour $n \geq 4$, par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 4$, $0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite (I_n).


y
O
1
2
α
x
(Γ)

Corrigé

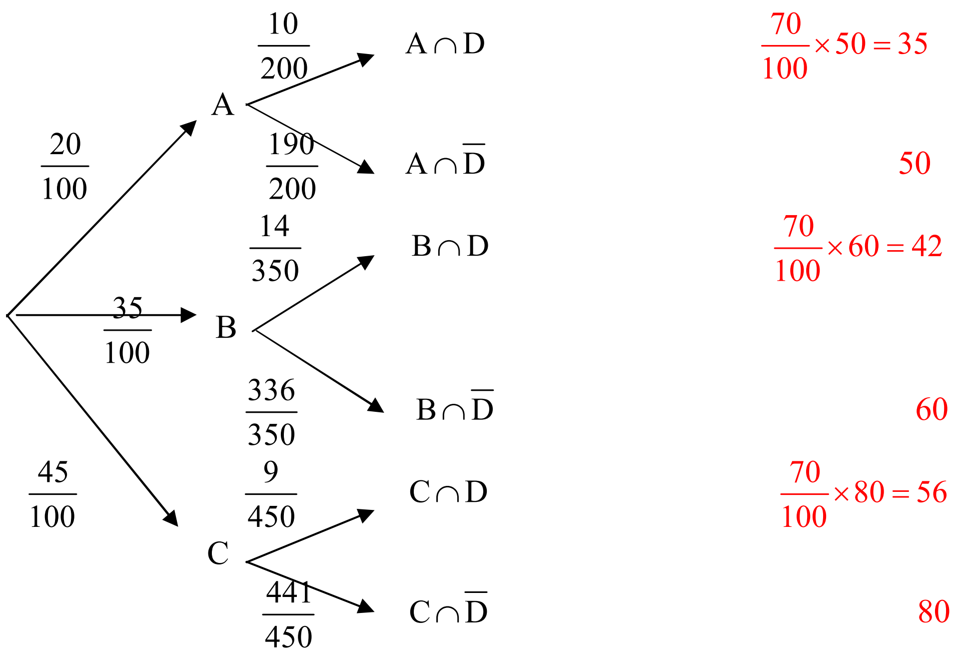
Exercice 1

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
1	**F**	**V**	**F**
2	**V**	**F**	**F**
3	**F**	**F**	**V**

Exercice 2 :

	Usine U_1	Usine U_2	Usine U_3	Total
Nombre de pochettes défectueuses	10	14	9	33
Nombre de pochettes non défectueuses	190	336	441	967
Total	200	350	450	1 000

1.



2. a) $P(D \cap A) = P(A).P(D/A) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$

b) $P(D \cap B) = P(B).P(D/B) = \frac{14}{1000} = \frac{7}{500}$; $P(D \cap C) = P(C).P(D/C) = \frac{9}{1000}$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{10+14+9}{1000} = \frac{33}{1000}$$

Ou encore : $P(D) = \frac{33}{1000}$ par lecture directe du tableau.

3. $P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A).P(\overline{D}|A)}{1-P(D)} = \frac{190}{967}$

4. Les valeurs de X sont : 35 ; 42 ; 50 ; 56 ; 60 et 80 (voir colonne à droite de l'arbre)

x_i	35	42	50	56	60	80	Total
p_i	0,01	0,014	0, 19	0, 009	0, 336	0, 441	1

Exercice 3 :

1. $y' - y - e^x + 1 = 0$; $y = z + xe^x + 1$; $y' = z' + e^x + xe^x$; $z' + e^x + xe^x - z - xe^x - 1 - e^x + 1 = 0$
   $z' - z = 0$; $z = ke^x$, où k est une constante réelle.
2. $f(x) = ke^x + xe^x + 1$; $f(0) = k + 1 = 0$ d'où $k = -1$. Ainsi : $f(x) = -e^x + xe^x + 1$.
3. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$, donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
   b) $f(x) - 1 = (x - 1)e^x$. (C) coupe (D) au point E (1 ;1) .
   (C) est au dessus de (D) sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
   (C) est au dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty,1]$

4. a) Pour tout x réel , . $f'(x) - f(x) - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = f'(x) - e^x$

b) $\mathcal{A} = \int_0^1 [1 - f(x)]dx \text{ ua} = \int_0^1 (e^x - f'(x))dx \text{ ua} = \left[e^x - f(x)\right]_0^1 \text{ ua} = (e-2) \text{ ua}$

Exercice 4

1.a) $h(3.51) \approx 0.001$ et $h(3.52) \approx -0.003$. Donc $3.51 < \alpha < 3.52$.

b) D'après la courbe (Γ) : $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$.

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \alpha$ et $h(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ou $\alpha < x$

2. a) Pour tout x >0, $f'(x) = -\dfrac{4\ell n\, x}{x^3}$.

b) $f(\alpha) = \dfrac{1 + 2\ell n\alpha}{\alpha^2} = \dfrac{h(\alpha) + \alpha}{\alpha^2} = \dfrac{1}{\alpha}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

3. a) Pour tout $x \in [4;+\infty[$, $f(x) > 0$.

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 + 2\ell n\, x - x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \text{ ; pour } x \in [4;+\infty[\text{ , } x > \alpha \text{ et } h(x) \prec 0 \text{ .}$$

Ainsi , pour tout $x \in [4;+\infty[$, $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{x}$.

b) Pour tout $n \ge 4$, $0 \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} \dfrac{dx}{x}$ donc $0 \le I_n \le \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ell n(1) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.