L. IBN KHALDOUN RADES		Mr. ABIDI Farid
	Devoir de contrôle n°2 Mathématiques	
Classe : 4 M_1	06/02/2008	Durée : 2h

Exercice 1 : (4 points)

Une ou plusieurs réponses peuvent être correctes. Recopier le tableau ci-dessous et compléter par **Vrai** ou **Faux**. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer x sachant que $1219 \equiv x[11]$ avec $-11 < x < 11$.
   a) x = 9 , b) x = 0 , c) x = -2 , d) x = -9.
2. Les congruences suivantes sont elles exactes ?
   a) $1458 \equiv 13(\text{mod} 17)$; b) $1458 \equiv -21(\text{mod} 17)$;
   c) $1458 \equiv 1450(\text{mod} 17)$; d) $1458 \equiv 1424(\text{mod} 17)$.

	a)	b)	c)	d)
Question 1				
Question 2				

Exercice 2 : (3 points)

Soit h la fonction définie sur [-1 ; 1] par $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-2x^2}}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

1. Déterminer la primitive H sur [-1 ; 1] de la fonction h qui s'annule pour $x = 0$.
2. Sans tracer la courbe (C), donner l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives x = 0 , x = 1 et y = 0.

Exercice 3: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et construire (C).
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$.

3. On désigne par g la fonction réciproque de f.

a) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que : $g'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) Calculer g(1) , g($\sqrt{2}$) et g(2) puis tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 4 : (7 points)

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct BCD.
On désigne par I le centre de gravité de BCD et par A le symétrique de I par rapport à la droite (BD).
Soit s la similitude directe qui envoie A sur B et B sur C.

1. a) Montrer que le rapport de s est $\sqrt{3}$ et qu'un angle de s est $\dfrac{\pi}{2}$.

   b) Prouver que S(I) = D.

2. On désigne par J le milieu du segment [AI].
   Déterminer S(J). En déduire le centre de s.

3. On considère l'application $\sigma = s \circ s \circ S_{(BD)}$.
   a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   b) Déterminer $\sigma\left(J\right)$ et $\sigma\left(I\right)$.
   c) En déduire le centre et l'axe de σ .

Exercice 1 :

	a	b	c	d
Question 1	Vrai	Faux	Vrai	Faux
Question 2	Vrai	Vrai	Faux	Vrai

Exercice 2 :

1. Pour tout x de]-1, 1], h(x) = $-\frac{1}{4}.\frac{(-4x)}{\sqrt{5-2x^2}}$.

   Une primitive de h sur [-1, 1] est $x \mapsto -\frac{1}{4}.2\sqrt{5-2x^2}+c, \quad c \in \mathbb{R}$.

   Ainsi H(x) = $-\frac{1}{2}\sqrt{5-2x^2}+c$.

   H(0) = 0 $\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   Il en résulte que : pour tout x de [-1, 1], H(x) = $-\frac{1}{2}\sqrt{5-2x^2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. $\mathcal{A}$ = $\int_0^1 h(x)dx = [H(x)]_0^1 = H(1)-H(0) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3 :

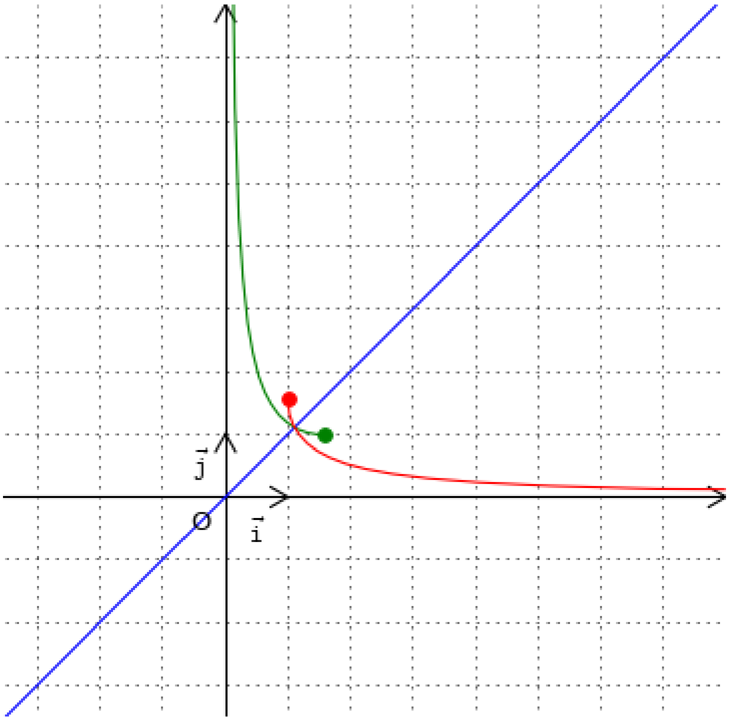
1. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

   f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, f'(x) = $\frac{-\cos x}{\sin^2 x} \leq 0$.

   f'(x)= 0 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	|	-	0
f(x)	|| $+\infty$	$\searrow$	1

   La droite $(O, \vec{j})$ est asymptote à (C).



2. f est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[1,+\infty[$.

3. a) f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$.

$$\begin{cases} x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f(x)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]1,+\infty[\\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

Or $y = f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ alors $\sin x=\dfrac{1}{y}$.

Comme $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos x>0$ et $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Par conséquent, $\left(f^{-1}\right)'(y)=-\dfrac{\frac{1}{y^2}}{\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}}=-\dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$.

Par suite, pour tout x de $]1,+\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

b) g(1)= $\dfrac{\pi}{2}$; $g\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$; g(2) = $\dfrac{\pi}{6}$.

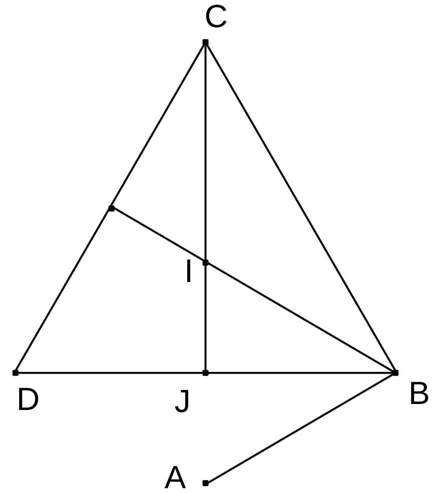
Exercice 4 :

1.a) $S_{(BD)}(I)=A$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]$ or (BI) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$, il en résulte que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

Ainsi $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv 3\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}}\right)[2\pi]$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\dfrac{BC}{AB}=\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$



Ainsi, le rapport de la similitude directe s est $\sqrt{3}$ et un angle de s est $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Posons S(I) = I', le triangle ABI est équilatéral direct donc son image BCI' par s est un triangle équilatéral direct . Comme BCD est un triangle équilatéral direct alors I' = D.

Par suite, s(I) = D.

2. J est milieu du segment [AI] donc s(J) est milieu du segment s([AI]) = [BD]. D'où s(J) = J.
3. a) σ est la composée de deux similitudes directes de même rapport $\sqrt{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport donc σ est une similitude indirecte de rapport $\left(\sqrt{3}\right)^2\times1=3$.

   b) On a : $\sigma(J)=\left(s\circ s\circ S_{(BD)}\right)(J)=(s\circ s)(J)=s(J)=J$

   et $\sigma(I)=\left(s\circ s\circ S_{(BD)}\right)(I)=(s\circ s)(A)=s(B)=C$.

   c) σ est une similitude indirecte de rapport 3 , différent de 1, et $\sigma(J)=J$ donc J est le centre de σ. D'autre part : J, I et $\sigma(I)=C$ sont alignés tels que $\overrightarrow{JC}=3\overrightarrow{JI}$, il en découle que (IC) est l'axe de σ.