Lycée Ibn Khaldoun – Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de contrôle n°3 Mathématiques 20 – 04 - 2009	Classes : 4 M_1- 2 Durée : 2h

Exercice 1 (3 points)

Dans le tableau ci-dessous, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	**b**	**c**
1	Le reste de la division de 8^{343} par 9 est :	4	6	8
2	Si A et B sont deux évènements, indépendants, d'un même univers tels que l'on ait : $p(A)=0,1$ et $p(B)=0,5$, alors :	$p(A\cup B)=0,05$	$p(A\cup B)=0,55$	$p(A\cup B)=0,6$
3	$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}}$	1	0	$+\infty$

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise a acheté n imprimantes à 728 dinars l'unité et p cartouches à 80 dinars l'unité.
Le coût total de cet achat a été de 3 296 dinars.

1. Démontrer que le couple (n, p) est solution de l'équation (E) : $91x+10y=412$ avec x et y entiers relatifs.
2. a) Démontrer que, si un couple (x, y) est solution de (E), alors $x\equiv 2(\text{mod}10)$.
   b) En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer les entiers n et p.

Exercice 3 (6 points)

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{2e^{nx}}{1+e^x}-1$, où n est un entier naturel, et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de la fonction f_0 correspondante à n = 0 et tracer (C_0).

2. Démontrer que (C_1) est symétrique de (C_0) par rapport à l'axe des abscisses.

3. Calculer, en unités d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_1), (C_0) et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = 2\dfrac{\left(e^n - n - 1\right)}{n}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1} + u_n\right)$ et en déduire que la suite (u_n) ne peut pas être convergente.

Exercice 4 (6 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont notés de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
On considère les évènements :

B : « le jeton tiré est blanc » et G : « le joueur gagne le jeu ».

Partie A

1. a) Faire un arbre de probabilité.

b) Montrer que p(G) = $\dfrac{7}{30}$.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1D par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5D.
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a) Montrer que les valeurs de X sont -1 et 4 puis déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance E(X) et montrer que le jeu est défavorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.

a) Calculer $p(G)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

Exercice 1 :

1. c) On a : $8^2 \equiv 1(\mathrm{mod}9)$ et $343 = 2\times 171+1$ donc $8^{343} \equiv 8^{2\times 171}\times 8(\mathrm{mod}9)$

   d'où $8^{343} \equiv 8(\mathrm{mod}9)$
2. b) A et B sont indépendants donc $p(A\cap B) = p(A).p(B) = 0{,}05$

   D'où $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0{,}1+0{,}5-0{,}05 = 0{,}55$

3. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}.\dfrac{2x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}.2\sqrt{x} = 1\times 0 = 0$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$

Exercice 2:

1. On aura : $728n + 80p = 3296$.

(n , p) est donc solution de l'équation $728x + 80y = 3296 \Leftrightarrow 91x + 10y = 412$

Car 728 = 8×91 , $80 = 8\times 10$ et $3296 = 8\times 412$.

2. a) Si (x, y) est solution de (E) : $91x + 10y = 412$, on aura $91x = 412 - 10y$.

   Donc $91x \equiv 412(\mathrm{mod}10)$ et comme $91 \equiv 1(\mathrm{mod}10)$ et $412 \equiv 2(\mathrm{mod}10)$ alors $x \equiv 2(\mathrm{mod}10)$.

   b) On aura donc $x = 2 + 10k$, $k \in \mathbb{Z}$

   et $91(2+10k)+10y = 412 \Leftrightarrow 10y = 412 - 91\times 2 - 91\times 10k = 230 - 910k$

   D'où $y = 23 - 91k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : si (x, y) = $(2+10k, 23-91k)$, on aura bien

$91(2+10k)+10(23-91k) = 412$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{(2+10k, 23-91k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Comme on doit avoir n et p dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\begin{cases} 2+10k \geq 0 \\ 23-91k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\dfrac{2}{10} \\ k \leq \dfrac{32}{91} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0.$$

L'entreprise a acheté 2 imprimantes et 23 cartouches d'encre.

Exercice 3 :

1. On a pour tout x réel, $f_0(x) = \dfrac{2}{1+e^x} - 1$.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} f_0(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f_0(x) = 2-1 = 1$.

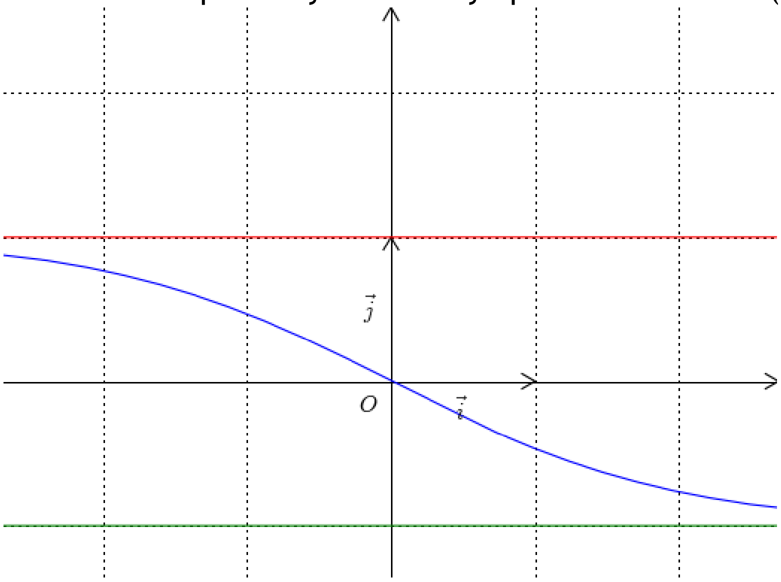
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$.

   D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	-
$f_0(x)$	1 $\searrow$ -1

La droite d'équation y = -1 est asymptote à la courbe (C_0) au voisinage de $+\infty$.

La droite d'équation y = 1 est asymptote à la courbe (C_0) au voisinage de $-\infty$.



2. Pour tout x réel, $f_1(x)+f_0(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1+\dfrac{2}{1+e^x}-1=\dfrac{2(e^x+1)}{1+e^x}-2=0$

donc (C_1) est symétrique de (C_0) par rapport à l'axe des abscisses.

3. L'aire demandée A est égale au double de l'aire du domaine limité par (C_1) , les droites d'équations respectives x = 0 ,x = 1 et l'axe des abscisses donc

$$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1\left(\frac{2e^x}{1+e^x}-1\right).dx=\left[2\ln(1+e^x)-x\right]_0^1=2\ln\frac{1+e}{2}-1$$

Donc A = 2 $\int_0^1 f_1(x).dx$ $u^2=4\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)-2$

4. a) $u_{n+1}+u_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{2e^{(n+1)x}}{e^x+1}+\frac{2e^{nx}}{e^x+1}-2\right)dx=\int_0^1\left[\frac{2e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}-2\right].dx$

$$=\int_0^1[2e^{nx}-2].dx=\left[\frac{2}{n}e^{nx}-2x\right]_0^1=2\frac{e^n-n-1}{n}.$$

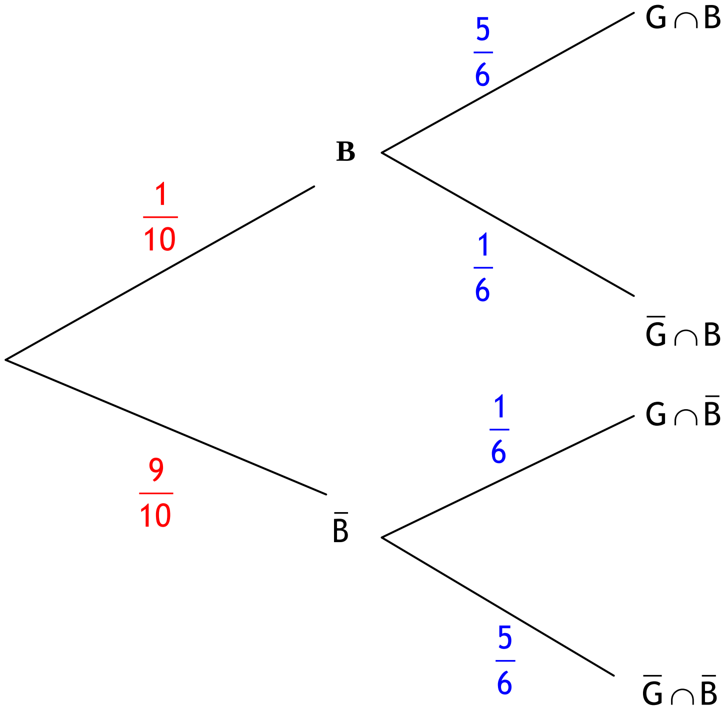
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\dfrac{e^n}{n}-2-\dfrac{2}{n}\right)=+\infty$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $(u_{n+1}+u_n)$ converge vers le réel 2ℓ ; ce qui est impossible.

Exercice 4:

Partie A

1. a)



b) la formule de probabilité totale ainsi que l'arbre de probabilité donnent :

$$p(G)=p(B\cap G)+p(\bar{B}\cap G)=p(B).p(G|B)+p(\bar{B}).p(G|\bar{B})=\frac{1}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{30}.$$

2. $p(B|\bar{G})=\dfrac{p(B\cap\bar{G})}{p(\bar{G})}=\dfrac{p(B\cap\bar{G})}{1-p(G)}=\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{23}{30}}=\dfrac{1}{46}.$

Partie B

1. a) On a :

Les cas possibles	Le gain algébrique du joueur
$G\cap B$	5 - 1 = 4
$\bar{G}\cap B$	-1
$G\cap\bar{B}$	5 - 1 = 4
$\bar{G}\cap\bar{B}$	-1

Ainsi les valeurs de X sont : -1 et 4.

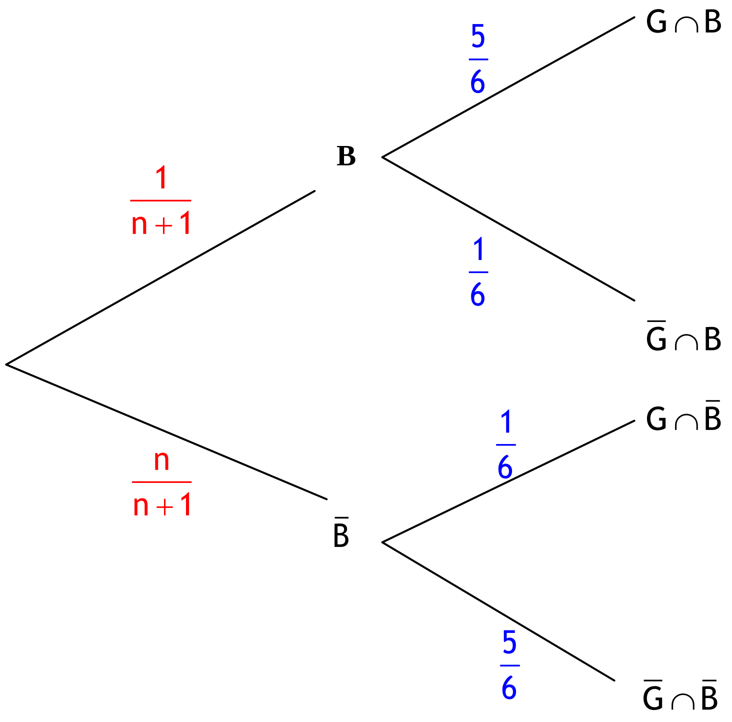
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-1	4	Total
p_i	$p(\bar{G})=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$	$p(G)=\frac{7}{30}$	1

b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = -1 \times \frac{23}{30} + 4 \times \frac{7}{30} = \frac{1}{6}$.

$E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur donc défavorable à l'organisateur.

2. a) On refait un autre arbre :



$$p(G) = p(B \cap G) + p(\overline{B} \cap G) = p(B).p(G|B) + p(\overline{B}).p(G|\overline{B}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$$

b) On en déduit que $p(\overline{G}) = 1 - \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{5n+1}{6(n+1)}$.

L'espérance mathématique de X devient :

$E(X) = -1 \times \frac{5n+1}{6(n+1)} + 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}$.

Le jeu est favorable pour l'organisateur si et seulement si E(X) ≤ 0

Or $E(X) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6(n+1)} \leq 0 \Leftrightarrow n \geq 19$.

Le jeu devient favorable à l'organisateur dés que n dépasse 19.