

**Exercice 1** (3 points)

Dans le tableau ci-dessous, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justification**, la réponse qui lui correspond.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, 1)$  et  $C(0, 1, 1)$ . On désigne par  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$  et par  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $-\frac{2}{3}$ .

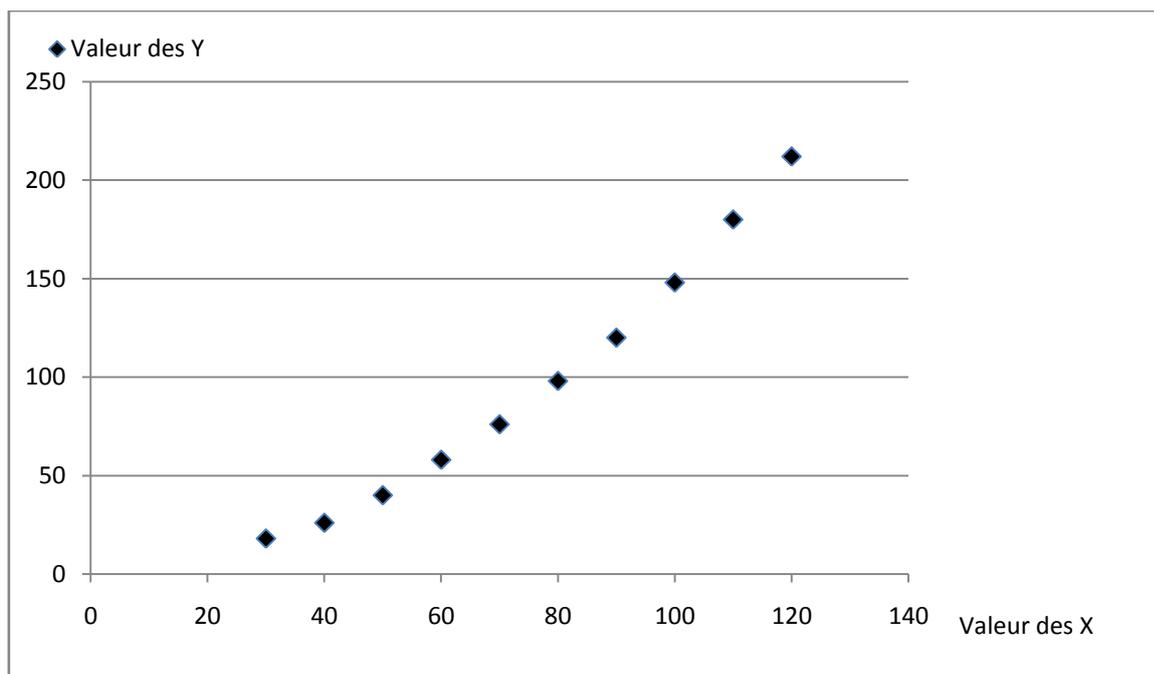
N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	L'aire du triangle ABC est :	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
2	Le volume du tétraèdre OABC est :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
3	l'image du plan (ABC) par $t$ est le plan (P) d'équation :	$x + y + z - \frac{7}{2} = 0$	$x + y + z - 1 = 0$	$x + y + z - \frac{1}{2} = 0$
4	Si (S) est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$ alors son image par $h$ est la sphère (S')	de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{4\sqrt{3}}{9}$	de centre $\Omega\left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$	de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

**Exercice 2** (3 points)

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à un automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter :  $x_i$  représente la vitesse de l'automobile en km/h et  $d_i$  la distance de freinage en mètres.

$x_i$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$d_i$	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

1. Ci-dessous est tracé dans un repère orthogonal le nuage de points  $M_i(x_i, d_i)$



a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.

b) Un ajustement affine de la série (x, d) paraît-il justifié ?

2. On pose  $y_i = \sqrt{d_i}$ .

a) Recopier et compléter le tableau suivant où  $y_i$  est arrondie au centième près :

$x_i$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$y_i$	4,24									

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 0,01 près.

c) En utilisant la droite (D), déterminer une estimation de y si la vitesse de freinage était de 140 km/h.

En déduire la distance de freinage, à 1 m près, correspond à cette vitesse.

### Exercice 3 (4 points)

1. a) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que  $19u + 12v = 1$ .

b) Vérifier que pour un tel couple, le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution du

$$\text{système (S)} : \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}.$$

2. Soit  $n_0$  une solution du (S).

a) Vérifier que : le système (S) équivaut à  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ .

b) Démontrer que : le système (S) équivaut à  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3. a) Trouver un couple  $(u, v)$  solution de l'équation  $19u + 12v = 1$  et calculer la valeur de  $N$  correspondante.  
 b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(S)$ .
4. A la première gare de péage d'une autoroute, il entre à l'autoroute toutes les 12 secondes une voiture et sorte de l'autoroute une voiture toutes les 19 secondes. On a aperçu la première voiture entrant à 0'06" et la première sortait à 0'12".  
 A quelle heure, deux voitures l'une entrante et l'autre sortante se croisent-elles pour la première fois dans cette gare ?

#### **Exercice 4** ( 5 points)

Une usine est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par cette usine pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de  $D_1$  avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut  $D_2$  avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi les deux défauts  $D_1$  et  $D_2$  étaient indépendants.

Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des défauts.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement  $D$  : « un article fabriqué par cette usine est défectueux » est égale à 0,0494.
2. Un dépositaire (grossiste) reçoit 800 articles de cette usine. Soit  $X$  la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
  - a) Définir la loi de probabilité de  $X$ .
  - b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ . Interpréter le résultat obtenu.
3. a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles de la société  $S$  chez ce dépositaire.  
 Calculer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
  - b) Ce petit commerçant veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50%.  
 Déterminer la valeur maximale du nombre  $n$  d'articles qu'il peut commander.
4. La variable aléatoire  $T$ , qui à tout article fabriqué par cette usine associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0007$ .  
 On donnera, pour les calculs, la valeur exacte puis la valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.
  - a) Quelle est la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours ?
  - b) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 1 000 jours.
  - c) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, calculer la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 1 000 jours.
  - d) On admet que la durée de vie moyenne d'un tel article est  $T_m = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$ .  
 Déterminer, à un jour près,  $T_m$ .

**Exercice 5** (5 points)

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Partie A :** On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + ny = x + \frac{1}{n}$ .

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = ax + b$  soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation (E') :  $y' + ny = 0$ .
3. Montrer qu'une fonction  $h$  est solution de (E) si, et seulement si, la fonction  $h - g$  est solution de (E').
4. En déduire toutes les solutions de (E).

**Partie B :** Soit  $f_n$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$ .

1. a) Vérifier que  $f_n$  est la solution de l'équation (E) qui prend la valeur  $-1$  en 0.  
b) Etudier les variations de  $f_n$ .
2. a) Montrer que l'équation, d'inconnue  $x$ ,  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $a_n$  strictement positive.  
b) Montrer que pour tout réel  $x$  positif,  $e^x \geq x + 1$ . En déduire la signe de  $f_n(1)$ .  
c) Prouver que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n} < a_n < 1$ .
3. a) Vérifier que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [n(e^{a_n} - 1) - 1]$ .  
b) Prouver que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f_{n+1}(a_n) > 0$ .  
c) En déduire que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et convergente.
4. On note  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .  
a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $a \leq a_n$  puis  $a \leq ne^{-na}$ .  
b) En déduire que  $a = 0$ .

Exercice 1 :

1. b) ; 2.b) ; 3. a) ; 4.a)

Exercice 2 :

1. a) La moyenne de  $x$  est  $\bar{x} = 75$  et celle de  $d$  est  $\bar{d} = 98,6$  donc  $G(\bar{x} = 75, \bar{d} = 98,6)$ .  
 b) La forme du nuage de points n'est allongée donc un ajustement affine de la série  $(x, d)$  n'est pas justifié.  
 2. a) On pose  $y_i = \sqrt{d_i}$ .

$x_i$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$y_i$	4,24	5,10	6,32	7,62	8,72	9,90	10,95	12,17	13,42	14,56

b) une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est :  $y = 0,12x + 0,59$ .

c) Si  $x = 140$  alors  $y = 0,12 \times 140 + 0,59 = 17,39$ .

D'où  $d = y^2 = (17,39)^2 \approx 302$ .

Ainsi lorsque la vitesse est 140 km/h, la distance de freinage est de 302 m.

Exercice 3 :

1. 19 et 12 sont premiers entre eux donc le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple vérifiant cette condition.

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 7u \times 19 \text{ donc } N \equiv 13 \pmod{19}.$$

De même :

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12v + 6 \times 19(1 - 12v) = 6 + 7v \times 12 \text{ donc } N \equiv 6 \pmod{12}.$$

2. a) Soit  $n_0$  une solution de (S).

$$n \text{ est solution de (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

b) Si  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$  alors  $n \equiv n_0 \pmod{12}$  et  $n \equiv n_0 \pmod{19}$  donc

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

Réciproquement :

Si  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ , alors il existe deux entiers relatifs  $k$  et  $k'$  tels que  $n - n_0 = 19k$  et

$$n - n_0 = 12k' \text{ donc } 19k = 12k'.$$

19 divise donc  $12k$ . Comme 19 et 12 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise  $k'$  donc  $k' = 12p$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ .

Il en résulte :  $n - n_0 = 12 \times 19p$  donc  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3. a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$19 = 1 \times 12 + 7$	$-5 \times (19 = 1 \times 12 + 7)$
$12 = 7 \times 1 + 5$	$3 \times (12 = 7 \times 1 + 5)$
$7 = 5 \times 1 + 2$	$-2 \times (7 = 5 \times 1 + 2)$
$5 = 2 \times 2 + 1$	$1 \times (5 = 2 \times 2 + 1)$

D'où :

$$1 \times 5 - 2 \times 7 + 3 \times 12 - 5 \times 19 = 2 \times 2 + 1 - 2 \times 5 - 2 \times 2 + 3 \times 7 + 3 \times 5 - 5 \times 12 - 5 \times 7$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2 \times 7 + 3 \times 12 - 5 \times 19 = 1 + 5 - 2 \times 7 - 5 \times 12$$

$$\Leftrightarrow 19 \times (-5) + 12 \times 8 = 1$$

Ainsi le couple  $(u, v) = (-5, 8)$  est une solution de l'équation  $19u + 12v = 1$ .

b)  $N = 678$  est une solution de (S). D'après la question 2.b), les solutions de (S) sont tous les nombres  $n$  tels que  $n \equiv N \pmod{12 \times 19}$  c'est-à-dire  $n \equiv 678 \pmod{228}$  ou encore  $n = 678 + 228k, k \in \mathbb{Z}$ .

Or  $678 = 2 \times 228 + 222$  donc  $n = 222 + 2 \times 228 + 228k = 222 + 228(2 + k), k \in \mathbb{Z}$ .

Il en résulte que  $n = 222 + 228k', k' \in \mathbb{Z}$

4. Le temps  $t$ , en secondes, qu'une voiture entre à l'autoroute est :  $t \equiv 6 \pmod{12}$  et celui  $t$ , en secondes, qu'une voiture sorte de l'autoroute est :  $t \equiv 12 \pmod{19}$  ; il en résulte que le temps  $t$ , en secondes, que deux voitures se croisent est solution du système (S') :

$$\begin{cases} t \equiv 12 \pmod{19} \\ t \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

Comme le couple  $(u, v) = (-5, 8)$  est solution de l'équation  $19u + 12v = 1$  alors

$$t_0 = 12 \times 12v + 6 \times 19u = 144 \times (-5) + 144 \times 8 = 144 \times 3 = 342$$

Par suite  $t \equiv t_0 \pmod{12 \times 19} \Leftrightarrow t \equiv 342 \pmod{228}$ .

L'heure, où deux voitures l'une entrante et l'autre sortante se croisent pour la première fois dans cette gare est :  $342'' = 05'42''$ .

Exercice 4 :

1. Désignons par :

$D_1$  : « l'article présente le défaut  $D_1$  » et  $D_2$  : « l'article présente le défaut  $D_2$  »

Remarquons aussi que  $D = D_1 \cup D_2$ .

$$p(D) = p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0,02 + 0,03 - 0,0006 = 0,0494.$$

2. a) La variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale  $B(800 ; 0,0494)$  donc sa loi de probabilité est définie par :

$$p(X = k) = \binom{800}{k} (0,0494)^k \times (1 - 0,0494)^{800-k} = \binom{800}{k} (0,0494)^k \times (0,9506)^{800-k}$$

avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 800\}$ .

b) L'espérance mathématique de  $X$  est  $E(X) = 800 \times 0,0494 = 39,52$ .

Dans ce lot de 800 articles, on estime trouver au environ de 40 articles défectueux.

3. a) Désignons par  $Y_{25}$  la variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(25 ; 0,0494)$ .

La probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans la commande de ce petit commerçant est :

$$p(Y_{25} \geq 2) = 1 - [p(Y_{25} = 0) + p(Y_{25} = 1)] = 1 - [(0,9506)^{25} + C_{25}^1(0,0494) \times (0,9506)^{24}] \approx 0,352.$$

$$b) p(Y_n \geq 1) \leq 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(Y_n = 0) \leq 0,5 \Leftrightarrow p(Y_n = 0) \geq 0,5 \Leftrightarrow (0,9506)^n \geq 0,5$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9506) \geq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)} \approx 13,68, \text{ il en suit : } n \leq 13.$$

Donc la valeur maximale du nombre d'articles qu'il peut commander est  $n = 13$ .

$$4. a) p(700 \leq T \leq 1000) = e^{-700\lambda} - e^{-1000\lambda} = e^{-0,49} - e^{-0,7} \approx 0,116.$$

$$b) p((T \leq 1000) | (T \geq 700)) = \frac{p(700 \leq T \leq 1000)}{p(T \geq 700)} = \frac{e^{-0,49} - e^{-0,7}}{e^{-0,49}} = 1 - e^{-0,21} \approx 0,189.$$

$$c) p((T \geq 1000) | (T \geq 700)) = \frac{p((T \geq 1000) \cap (T \geq 700))}{p(T \geq 700)} = \frac{p(T \geq 1000)}{p(T \geq 700)} = \frac{e^{-0,7}}{e^{-0,49}} = e^{-0,21}$$

$$\text{D'où } p((T \geq 1000) | (T \geq 700)) \approx 0,811.$$

$$d) \text{ Calculons d'abord par une intégration par parties l'intégrale : } I(A) = \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Pour cela, on pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} & v(x) = -e^{-\lambda x} \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[ -x e^{-\lambda x} \right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx = -Ae^{-\lambda A} + \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A \\ &= -Ae^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Il en résulte : } \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{(-\lambda A e^{-\lambda A}) - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0007} \approx 1429.$$

Exercice 5 :

Partie A :

$$1. \text{ g est une solution de (E) } \Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } g'(x) + ng(x) = x + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } nax + nb + a = x + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} na = 1 \\ nb + a = \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ y' + ny = 0 } \Leftrightarrow \text{ y' = -ny } \Leftrightarrow \text{ y = ke}^{-nx}, \text{ k } \in \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ H est solution de (E) } \Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } h'(x) + nh(x) = x + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } h'(x) + nh(x) = g'(x) + ng(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } h'(x) - g'(x) + n(h(x) - g(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ pour tout x réel, } (h' - g')(x) - n(h - g)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ h - g est solution de (E') .}$$

4. Les solutions de (E) sont donc les fonctions h définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) - g(x) = ke^{-nx}, \text{ k } \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h(x) = g(x) + ke^{-nx}, \text{ k } \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{x}{n} + ke^{-nx}, \text{ k } \in \mathbb{R}.$$

Partie B

1. a) On a :

- ✓ pour tout  $x$  réel,  $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx} = \frac{x}{n} + k.e^{-nx}$  avec  $k = -1$
- ✓  $f_n(0) = 0 - e^0 = -1$ .

Donc  $f_n$  est la solution de l'équation (E) qui prend la valeur  $-1$  en  $0$ .

b) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ .

$f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  réel,  $f_n'(x) = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$ .

D'où le tableau de variation suivant :

$x$	$0$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
$f_n(x)$	$-1$	$+\infty$

2. a) On a :  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ ,  $f_n([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$  et  $0 \in [-1, +\infty[$  donc l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $a_n$  dans  $[0, +\infty[$ . Comme  $f_n(0) = -1$  alors  $f_n(0) \neq 0$  donc  $a_n > 0$ .

b) On sait que pour tout  $t$  positif,  $e^t \geq 1$  donc pour tout réel  $x$  positif,

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt \Leftrightarrow e^x - 1 \geq x \Leftrightarrow e^x \geq x + 1.$$

$$f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{e^n} = \frac{e^n - n}{ne^n};$$

or pour tout  $n \geq 2$ ,  $e^n \geq n + 1 \Leftrightarrow e^n - n \geq 1$ , donc  $f_n(1) > 0$ .

c) Pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - e^{-1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} = \frac{e - n^2}{ne}$  ;

Or  $2 \leq e \leq 3$  et  $n^2 \geq 4$  ou encore  $-n^2 \leq -4$  donc  $e - n^2 \leq -1 < 0$  d'où  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ .

Ainsi,  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(a_n) < f_n(1)$  et comme  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , alors

$$\frac{1}{n} < a_n < 1.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) Pour tout } n \geq 2, f_{n+1}(a_n) &= \frac{a_n}{n+1} - e^{-(n+1)a_n} = \frac{a_n - (n+1)e^{-(n+1)a_n}}{n+1} \\ &= \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [a_n e^{(n+1)a_n} - (n+1)] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [a_n e^{a_n} e^{na_n} - (n+1)] \end{aligned}$$

Or  $f_n(a_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{n} - e^{-na_n} = 0 \Leftrightarrow e^{-na_n} = \frac{a_n}{n} \Leftrightarrow e^{na_n} = \frac{n}{a_n}$ , il en résulte :

$$f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} \left[ a_n e^{a_n} \frac{n}{a_n} - (n+1) \right] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [n e^{-a_n} - (n+1)] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [n(e^{a_n} - 1) - 1]$$

b) On a pour tout  $n \geq 2$ ,  $e^{a_n} \geq a_n + 1 \Leftrightarrow e^{a_n} - 1 \geq a_n \Leftrightarrow n(e^{a_n} - 1) \geq na_n$

or  $a_n > \frac{1}{n}$  donc  $na_n > 1$  d'où  $n(e^{a_n} - 1) > 1$ .

Par suite  $n(e^{a_n} - 1) - 1 > 0$  et comme  $\frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} > 0$  alors  $f_{n+1}(a_n) > 0$ .

b) On sait que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$  donc  $f_{n+1}(a_n) > 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$ .

Or la fonction  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , donc nécessairement

$a_n > a_{n+1}$  d'où la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.

La suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  étant positive donc minorée par 0. Il en résulte que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est convergente.

4. a) La suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est convergente donc  $(a_n)_{n \geq 2}$  est bornée.

Soit  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ,  $(a_n)_{n \geq 2}$  est donc minorée par  $a$  ou encore pour tout  $n \geq 2$ ,  $a_n \geq a$ .

fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et pour tout  $n \geq 2$ ,  $a_n \geq a$  donc

$$f_n(a_n) \geq f_n(a) \Leftrightarrow 0 \geq f_n(a) \Leftrightarrow \frac{a}{n} - e^{-na} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq n e^{-na}.$$

b) On sait que  $a \geq 0$ .

supposons que  $a > 0$ , il en résulte que :

$$a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-na} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-na} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a} (-nae^{-na}) = -\frac{1}{a} \times 0 = 0 \text{ absurde}$$

Donc  $a = 0$ .