Lycée IBN KHALDOUN - RADES ❖❖❖ ***DEVOIR DE SYNTHESE N° 2*** ❖❖❖ Mr ABIDI Farid	CLASSE : $4^{ème}$ *MATHEMATIQUES* EPREUVE ***MATHEMATIQUES*** *Durée* **4h** *Date:* 02-03-2010

Exercice 1: (3 points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{1+\ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué des points de (C), d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume V du solide ainsi engendré vaut :

   a) π ;   b) πe ;   c) $\pi(e-1)$.

2. Un inverse de 2010 modulo 19 est :

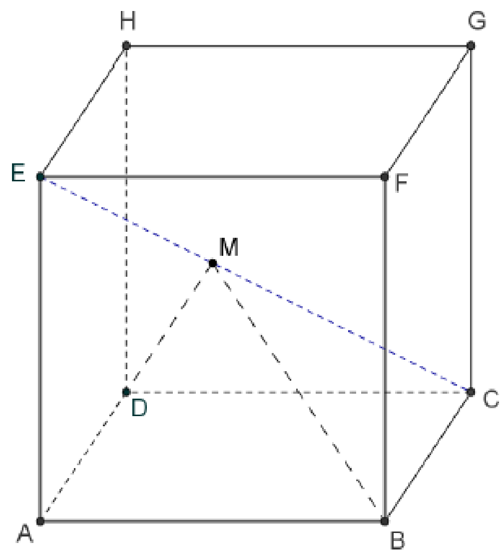
   a) 14 ;   b) 15 ;   c) 16 .

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. La symétrie orthogonale d'axe la droite (AB) avec $z_A = 1+i$ et $z_B = 1$, a pour écriture complexe:

   a) $z' = (1+i).\bar{z} - 1$;   b) $z' = -\bar{z} + 2$;   c) $z' = (1+i).\bar{z} - i$

Exercice 2: (4 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, représenté ci- contre . On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Soit K l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$ et I l'image de K par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.

   a) Montrer que le triangle BDI est rectangle en I.

   b) Soit J le symétrique de I par rapport à E. Vérifier que les coordonnées de J sont $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   c)Déterminer le volume V du tétraèdre BCDJ.

2. A tout réel α de l'intervalle [0, 1], on associe le point $M(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$.

   a) Montrer que pour tout α de [0, 1], M appartient à la droite [EC].

   b) Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est $f(\alpha)=\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$.

   c) Déterminer les coordonnées du point L du segment [EC] pour lequel la distance de ce point à la droite (BD) est minimale.

Exercice 3: (4 points)

n étant un entier relatif, on considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5\,(\text{mod}\,13) \\ n \equiv 1\,(\text{mod}\,17) \end{cases}$.

1. Vérifier que 239 est solution de (S).

2. Soit N un entier relatif solution de (S).

Démontrer qu'il existe des entiers relatifs x et y tels que : $\begin{cases} N = 1 + 17x \\ N = 5 + 13y \\ 17x - 13y = 4 \end{cases}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $17x - 13y = 4$.

4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

5. Soit n un entier relatif quelconque. Démontrer l'équivalence suivante :

$$n \equiv 18\,(\text{mod}\,221) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 5\,(\text{mod}\,13) \\ n \equiv 1\,(\text{mod}\,17) \end{cases}$$

Exercice 4 : (4 points)

ABCD est un carré de centre O tel que AB= 2 et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. E et F sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. On note G le milieu de [BF].

Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur E.

1. Calculer le rapport et l'angle de S.

2. Vérifier que S(B) = F et déterminer S(E).

3. Soit I le centre de S et $h = S \circ S$.

   a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport.

   b) Démontrer que I est le point d'intersection des droites (AF) et (DG).

   c) Déterminer l'image par S du carré ABCD et en déduire la nature du triangle OIC.

4. Soit J le milieu du segment [OF], on note K son symétrique par rapport à (AF) et on considère la similitude indirecte φ qui envoie A sur F et B sur K.

4. Soit J le milieu du segment [OF], on note K son symétrique par rapport à (AF) et on considère la similitude indirecte φ qui envoie A sur F et B sur K.

a) Montrer que le rapport de φ est $\frac{1}{4}$.

b) Montrer que $\varphi = S_{(AF)} \circ S \circ S$. Caractériser alors φ.

Exercice 5: (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. a) Montrer que f est impaire et dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout de $]-1,1[$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

b) Etudier f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations respectives x = 0, x = $\frac{1}{2}$ et y = 0. Montrer que $\mathcal{A} = \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2$.

3. On pose pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que g est une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\cos t}$.

b) En déduire l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t}$.

4. On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = J$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt$, pour $n \geq 1$.

On pose, pour tout entier naturel n, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right) dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $K_n \geq 0$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}$, où b et c sont deux réels à préciser.

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

CORRIGE

Exercice1:

1. b) ; 2. a) ; 3. b)

Exercice 2:

1. a) On a K l'image de G par la translation de vecteur donc $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$ d'où

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$, il en résulte : $K(1,1,2)$. Or I l'image de K par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$ d'où $I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

On sait que B(1, 0, 0) et D(0, 1, 0) donc $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0$ d'où

les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux ou encore le triangle BDI est rectangle en I.

b) J le symétrique de I par rapport à E $\Leftrightarrow$ E est milieu de [IJ].

On vérifie ainsi que J $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

c) Le volume V du tétraèdre BCDJ est $V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BJ}\right)\right|$;

Or $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BJ}\right) = \begin{vmatrix}0 & -1 & -\frac{4}{3}\\1 & 1 & -\frac{1}{3}\\0 & 0 & \frac{4}{3}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-1 & -\frac{4}{3}\\0 & \frac{4}{3}\end{vmatrix} = \frac{4}{3}$ donc $V = \frac{1}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{9}$.

2. A tout réel α de l'intervalle [0, 1], on associe le point $M(\alpha,\ \alpha,\ 1-\alpha)$.

a) On a : $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EM} = \alpha\overrightarrow{EC}$ d'où $M \in (EC)$.

Par suite, pour tout α de [0, 1], M appartient à la droite [EC].

b) $f(\alpha)$ est la distance du point M à la droite (BD) et est donnée par la formule suivante :

$$f(\alpha)=d(M,(BD))=\frac{\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}\;;\text{ or }\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-\alpha\\-\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\text{ donc }\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}\alpha-1\\1-\alpha\\1-2\alpha\end{pmatrix}.$$

d'où $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{(\alpha-1)^2+(1-\alpha)^2+(1-2\alpha)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6\alpha^2-8\alpha+3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+\dfrac{3}{2}}$.

c) Pour tout α de $[0,1]$, $3\alpha^2-4\alpha+\dfrac{3}{2}>0$ donc f est dérivable sur $[0,1]$.

Pour tout α de $[0,1]$, $f'(\alpha)=\dfrac{6\alpha-4}{2\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+\dfrac{3}{2}}}=\dfrac{3\alpha-2}{\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+\dfrac{3}{2}}}$.

Il en suit : $f'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Dressons le tableau de signe de $f'(\alpha)$:

α	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(\alpha)$		–	0	+	

Ainsi, f admet un minimum en $\alpha=\dfrac{2}{3}$. D'où la distance du point $L\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ à la droite (BD) est minimale.

<u>Exercice 3:</u> (4 points)

1. 239 – 5 = 13.18 donc $239\equiv5(\mathrm{mod}\,13)$ et 239 – 1 = 14.17 donc $239\equiv1(\mathrm{mod}\,17)$.

2. Soit N un entier solution du système (S).

On a : $N\equiv5(\mathrm{mod}\,13)$ donc il existe un entier y tel que N = 5 + 13y.

Et $N\equiv1(\mathrm{mod}\,17)$ donc il existe un entier x tel que N = 1 + 17x.

De, N = 5 + 13y = 1 +17x , on tire : 17x – 13y = 4.

3. remarquons que : $17\wedge13=1$ donc l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Le couple (1,1) est une solution de l'équation (E) : 17x – 13y = 4.

Sinon, on cherche une solution particulière de 17x - 13y = 1, en appliquant l'algorithme d'Euclide :

On multiplie par (-3)	17 = 1 x 13 + 4
On multiplie par 1	13 = 3 x 4 + 1

On obtient ainsi : -3 . 17 + 1. 13 = -3. 13 - 3.4 + 3.4 + 1 donc -3. 17 + 4. 13 = 1

d'où et en multipliant par 4, on obtient : -12. 17 + 16. 13 = 4 .

Par suite, le couple (-12, -16) est une solution particulière de (E).

L'équation proposée (E) est donc équivalentes à l'équation $17(x-1)-13(y-1)=0$ ou encore à $17(x-1)=13(y-1)$.

Comme $17\wedge 13=1$ et 17 divise 13(y – 1) alors 17 divise y – 1 ; par suite, il existe un entier k tel que y – 1 = 17k d'où y = 17k + 1 , $k\in\mathbb{Z}$.

Il en résulte, 17(x - 1) = 13. 17k d'où x – 1 = 13k ou encore : x = 13k + 1 , $k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi l'ensemble de solutions de l'équation (E) est $\{(17k+1,13k+1),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Remarque :

le couple (-12, -16) est une solution particulière de (E).

L'équation proposée (E) est donc équivalentes à l'équation $17(x+12)-13(y+16)=0$ ou encore à $17(x+12)=13(y+16)$.

Comme $17\wedge 13=1$ et 17 divise 13(y + 16) alors 17 divise y + 16 ; par suite, il existe un entier k' tel que y + 16 = 17k' d'où y = 17k' - 16 , $k\in\mathbb{Z}$.

Il en résulte, 17(x + 12) = 13. 17k' d'où x + 12 = 13k' ou encore : x = 13k' - 12 , $k'\in\mathbb{Z}$.

4. De N = 1 + 17k et x = 1 + 13k, on déduit n = 1 + 17(1 + 13k) soit N = 18 + 221k.

Remarque :

De N = 1 + 17k et x = -12 + 13k', on déduit N = 1 + 17(-12 + 13k') = -203 + 221k'= 18 – 221 +221k' soit N = 18 + 221(k'-1) ; pour obtenir le résultat, il suffit de poser k = k'-1.

5. On a déjà démontré l'implication suivante :

$$\begin{cases} n\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,13) \\ n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,17) \end{cases} \Rightarrow \quad n\equiv 18\,(\mathrm{mod}\,221)$$

Réciproquement :

Soit n un entier tel que $n\equiv 18\,(\mathrm{mod}\,221)$, il existe un entier k tel que $n=18+221k$;

d'où n = 18 + 17. 13k donc :

$n \equiv 18(\mathrm{mod}13) \Leftrightarrow n \equiv 5(\mathrm{mod}13)$ et $n \equiv 18(\mathrm{mod}17) \Leftrightarrow n \equiv 1(\mathrm{mod}17)$.

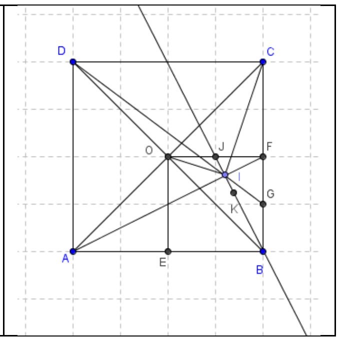
Par suite : $\begin{cases} n \equiv 5(\mathrm{mod}13) \\ n \equiv 1(\mathrm{mod}17) \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv 18(\mathrm{mod}\,221)$.

Exercice 4 : (4 points)

1. S(A) = B et S(D) = E donc le rapport de S est $\frac{EB}{AD} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$

et comme $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$ alors $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de S.

2. On a :



- ✓ ADB est un triangle isocèle, rectangle en A et de sens indirect
- ✓ BEF est un triangle isocèle, rectangle en B et de sens indirect

Donc ces deux sont semblables et par suite, il existe une unique similitude directe qui envoie A sur B , D sur E et B sur F.

Or S est l'unique similitude directe qui envoie A sur B et D sur E, il en suit : S envoie B sur F.

E est milieu de [AB] donc S(E) est milieu de $S([AB]) = [BF]$ d'où S(E) = G.

3. Soit I le centre de S et $h = S \circ S$.

a) h est la similitude directe de centre I, de rapport $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ et d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ donc est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{4}$.

b) h(A) = $S \circ S(A) = S(B) = F$ donc $I \in (AF)$ et h(D) = $S \circ S(D) = S(E) = G$ donc $I \in (DG)$.
Ainsi : I est le point d'intersection des droites (AF) et (DG).

c) S(A) = B , S(B) = E et S(D) = E donc l'image par S du carré ABCD directe est la carré BFOE direct .

Il en résulte : S(C) = O d'où $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IO}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par conséquent le triangle OIC est rectangle en I et direct.

4. Soit J le milieu du segment [OF], on note K son symétrique par rapport à (AF) et on considère la similitude indirecte φ qui envoie A sur F et B sur K.

a) $\varphi(A)=F$ et $\varphi(B)=K$ donc le rapport de φ est $\frac{FK}{AB}=\frac{FI}{AB}=\frac{FG}{AB}=\frac{1}{4}$.

b) φ et $S_{(AF)}\circ S\circ S$ sont deux similitudes indirectes.

$S_{(AF)}\circ S\circ S(A)=S_{(AF)}(F)=F=\varphi(A)$ et $S_{(AF)}\circ S\circ S(B)=S_{(AF)}\circ S(F)=S_{(AF)}(J)=K=\varphi(A)$

Donc $\varphi=S_{(AF)}\circ S\circ S$.

$\varphi=S_{(AF)}\circ S\circ S=S_{(AF)}\circ h_{\left(I,\frac{1}{4}\right)}$ donc est la similitude indirecte de centre I, de rapport $\frac{1}{4}$ et d'axe (AF).

<u>Exercice 5:</u> (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. a) Pour tout x de $]-1,1[$, $f(-x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$ donc f est impaire. La fonction $x\mapsto\frac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a : pour tout de $]-1,1[$, $f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{1-x^2}$.

b) Comme est impaire, il suffit d'étudier f sur $[0,1[$.

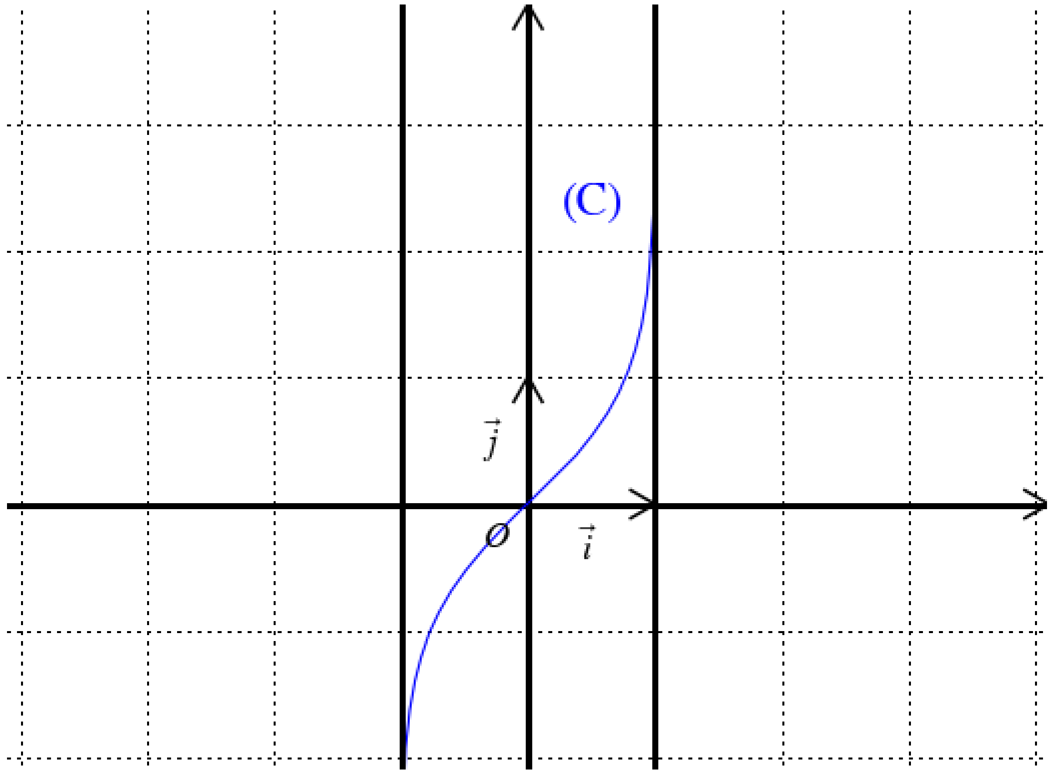
$\lim\limits_{x\to1^{-1}}\frac{1+x}{1-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^{-}}f(x)=+\infty$.

Pour tout x de $[0,1[$, $f'(x)>0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La droite d'équation x = 1 est asymptote à (C) et l'origine est centre de symétrique de (C).



2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations respectives x = 0, x = $\frac{1}{2}$ et y = 0.

Calculons, à l'aide d'une intégration par parties, $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

Pour cela, posons : $u(x) = f(x)$, $u'(x) = f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$v'(x) = 1$, $v(x) = x$

Noun obtenons :

$$\mathcal{A} = \left[xf(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-x^2\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2.$$

3. On pose pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

a) la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \in [0,1[$

et f est dérivable sur $\left[0,1\right[$ donc g est dérivable sur $\left[0,1\right[$.

Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=\cos x . f'(\sin x)=\cos x.\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}=h(x)$.

Donc g est une primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $h: t \mapsto \frac{1}{\cos t}$.

b) $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}h(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g'(t)dt=\left[g(t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

4. On considère la suite (I_n) définie par : $I_0=J$ et $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}dt$, pour $n\geq 1$.

On pose, pour tout entier naturel n, $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4^n\cos t}-\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right)dt$.

a) $0\leq \sin t\leq \frac{1}{2}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq \sin^{2n} t\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow 0\leq \sin^{2n} t\leq \frac{1}{4^n}$.

Comme pour tout t de $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, $\cos t>0$, alors $0\leq \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\leq \frac{1}{4^n\cos t}$ d'où $\frac{1}{4^n\cos t}-\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\geq 0$.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, $K_n\geq 0$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $K_n\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4^n\cos t}-\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}\right)dt\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{4^n\cos t}\geq \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}dt$.

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t}dt\leq \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{4^n\cos t} \Leftrightarrow I_n\leq \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos t} \Leftrightarrow I_n\leq \frac{1}{4^n}\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

Comme $I_n\geq 0$, alors on conclue : pour tout entier naturel n, $0\leq I_n\leq \frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{4^n}$.

c) On a : pour tout entier naturel n, $0\leq I_n\leq \frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{4^n}$.

et $\frac{1}{4}\in\left]-1,1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{4^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt{3}\right).\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$.

Donc la suite (I_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.