

◆◆◆
DEVOIR DE SYNTHESE N° 3

EPREUVE MATHEMATIQUES

◆◆◆
 Mr ABIDI Farid

Durée 3h

Date: 13-05-2010

Exercice 1 : (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
 Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justifier**, la réponse qui lui correspond.

1. Si X suit la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, 1]$ alors $P(0,2 \leq X \leq 0,92) =$

- a) 0,7 ; b) 0,72 ; c) 0,9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. La parabole de foyer $F(2, \frac{1}{4})$ et de directrice $D: y = -\frac{1}{4}$ a pour équation :

- a) $y = x^2 - 4x + 4$; b) $(x-2)^2 = -y$; c) $(y-2)^2 = x$

3. Si (H) est l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ alors toutes droite passant par le point $A(5, 0)$ et parallèle à l'une des asymptotes à (H) coupe (H) en :

- a) un seul point ; b) deux points exactement ; c) en plus que deux points.

Exercice 2 : (4 points)

On se propose de résoudre déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$.

1. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a) Démontrer que : si f est solution de (E) alors g est solution de l'équation (E') : $y' = 2y + 8$.

b) Montrer que : si h est solution de (E') f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x h(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Existe-t-il une fonction f solution de (E) telle que $f(\ln 2) = 0$.

Exercice 3 : (4 points)

La durée de vie d'une machine à laver est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda > 0$. Ainsi, la probabilité que la machine de tombe pas en panne avant t années ($t > 0$) est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ , arrondi à 10^{-2} , pour que la probabilité $P(X > 3) = 0,86$.
2. Calculer la probabilité pour que cette machine fonctionne entre 3 et 10 ans.
3. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne pour la première fois après 10 ans de fonctionnement ?
4. Sachant que la machine à laver à fonctionner 3 ans, quelle est la probabilité :
 - a) pour qu'elle tombe en panne avant 10 ans.
 - b) pour qu'elle ne tombe pas en panne avant 10 ans.

Exercice 4 : (4 points)

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit A selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit A;
- y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan (**unités graphiques** : 4 cm pour 1 dinar en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).
2. On recherche un ajustement affine de la série (x_i, y_i) .
 - a. Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
(Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification).
 - b. Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.
 - c. Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 Dinars.
3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose $z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$

- Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en z par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
- Vérifier que la nouvelle estimation de y en fonction de x est donnée par $y = 0,313x^2 - 2,64x + 6,062$ (les coefficients sont arrondis à 10^{-3} près).
- En utilisant cet ajustement, donner une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

Exercice 5 : (5 points)

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x + \sqrt{9x^2 + 1}$

- Vérifier que g est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Montrer que pour tout x réel, $g(x) > 0$.

On définit sur \mathbb{R} la fonction f par $f(x) = \ln(g(x))$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Calculer $f(x) + f(-x)$ et en déduire qu'il suffit d'étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

3. a- Vérifier que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$.

b- Montrer que O est un point d'inflexion de (C) .

4. a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variations de f .

5. a- Tracer la droite $(D) : y = x$ et la courbe (C) .

b- L'équation $f(x) = x$ admet trois racines dont l'une α est positive. Vérifier que $2,7 < \alpha < 2,9$.

6. a- Démontrer que la fonction f admet sur son domaine de définition une fonction réciproque f^{-1} et tracer sa courbe représentative (C') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b- Montrer que pour tout x réel, $f^{-1}(x) = \frac{1}{6} (e^x - e^{-x})$.

7. Calculer l'aire, en unités d'aire, des deux régions du plan limitées par les deux courbes (C) et (C') .

CORRIGE

Exercice 1 :

1. **b)** ; 2. **a)** ; 3. **a)**

Exercice 2 :

1. a) On suppose que f est solution de (E) :

$$\text{Pour tout } x > 0, \quad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{8x^2 + (2x+1)f(x)}{x} .$$

Or $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ alors

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{8x^2 + (2x+1)f(x) - f(x)}{x^2} = \frac{8x^2 + 2xf(x)}{x^2} = 8 + 2\frac{f(x)}{x} = 8 + 2g(x) .$$

Donc g vérifie l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.

Par conséquent , si f est solution de (E) alors g est solution de (E') .

b) On suppose que h est solution de (E') :

on alors $h'(x) = 8 + 2h(x)$, d'où, pour la fonction f définie par $f(x) = x.h(x)$,

$$f'(x) = x.h'(x) + h(x) = 8x + 2x.h(x) = 8x + (2x+1)h(x)$$

Donc , on a : $xf'(x) - (2x+1).f(x) = 8x^2 + x(2x+1).h(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

Donc f est solution de (E) .

2. (E') $\Leftrightarrow y = ke^{2x} + 4$, $k \in \mathbb{R}$.

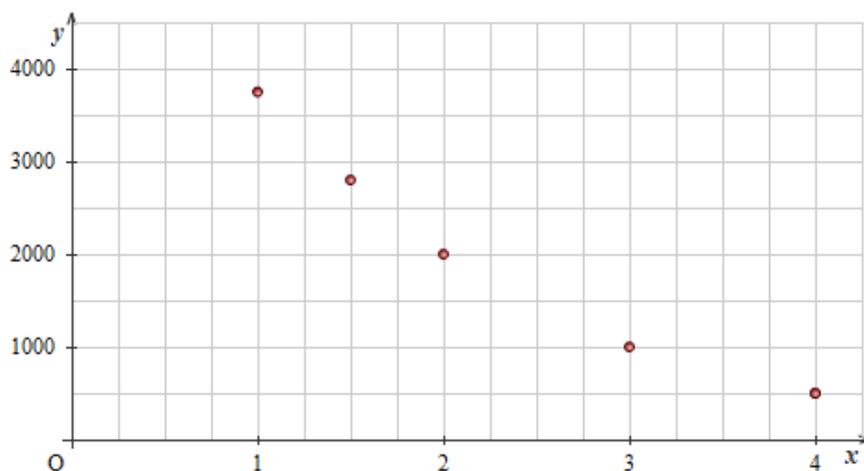
3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = x.g(x) \Leftrightarrow f(x) = kxe^{2x} - 4x$, $k \in \mathbb{R}$.

Or $f(\ln 2) = 0 \Leftrightarrow k \ln 2 e^{2\ln 2} - 4\ln 2 = 0 \Leftrightarrow 4k \ln 2 = 4\ln 2 \Leftrightarrow k = 1$.

Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = xe^{2x} - 4x$.

Exercice 4 :

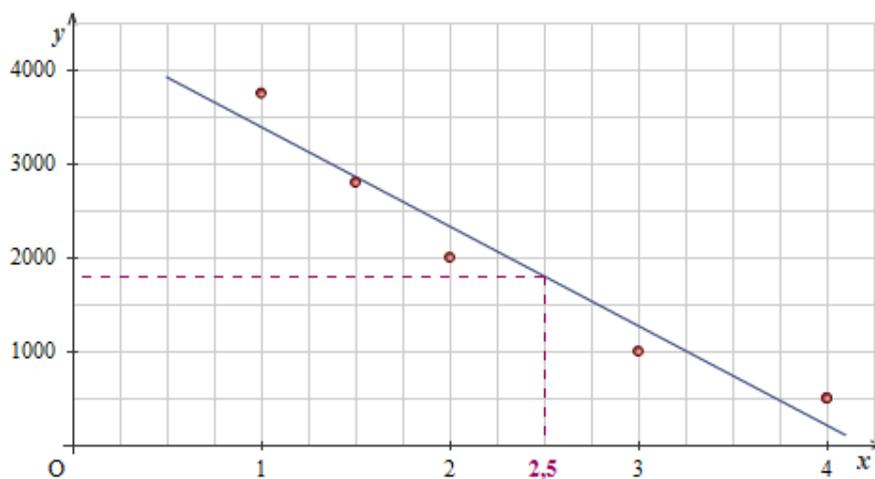
1. Le nuage de points



2. a) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres est :

$$y = -1,06 \cdot x + 4,45.$$

b)



c) Si le prix de vente est 2,5 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimés en milliers est : $y = -10,6 \cdot 2,5 + 4,45 = 1,8$.

Le nombre d'acheteurs est donc 1800.

2. a) On complète le tableau suivant :

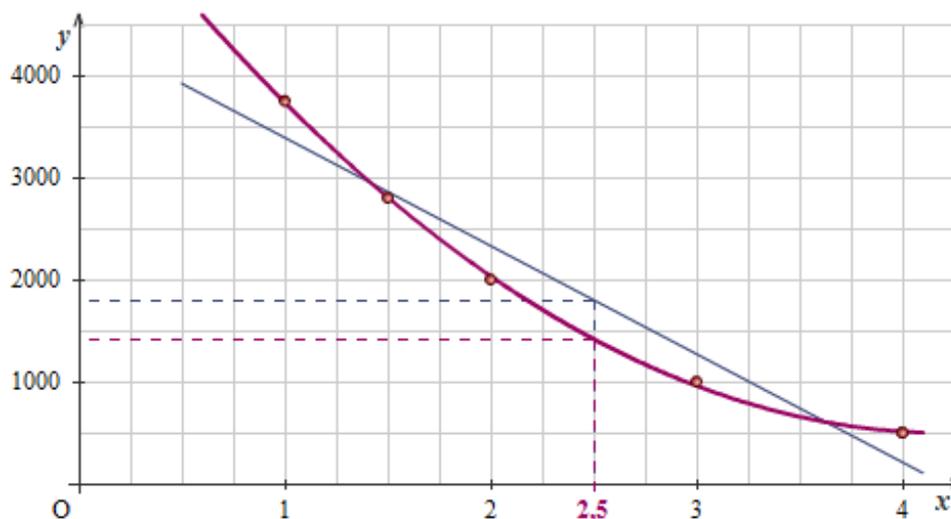
x_i	1	1,50	2	3	4
$z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$	5,8081	4,141225	2,7556	0,8281	0,0256
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

Une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés est :

$$z = 0,557.x + 0,500 .$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 0,557.z + 0,500 \Leftrightarrow y = 0,557(0,75x - 3,16)^2 + 0,500 \\ &\Leftrightarrow y = 0,557(0,5625x^2 - 4,74x + 9,9856) + 0,5 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } y = 0,313x^2 - 2,64x + 6,062$$



c) Le prix de vente est de 2,500 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est :

$$y = 0,313 \times (2,5)^2 - 2,64 \times 2,5 + 6,062 = 1,41825$$

Donc le nombre d'acheteurs est 1418.