

Exercice 1- (3 points)

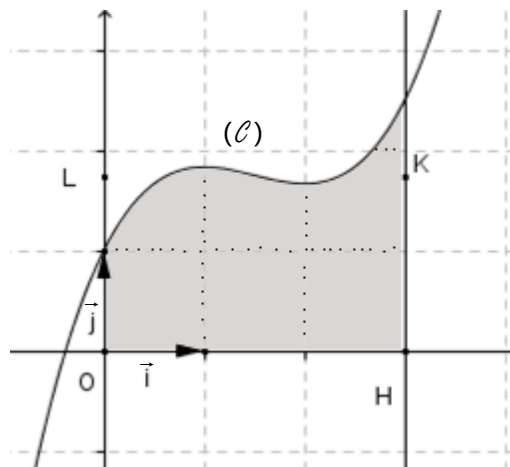
Pour chaque affirmation dire, sans justification, si elle est **vraie** ou **fausse**.

1. On considère f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ est donnée ci-contre et tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les points L et K n'ont même ordonnée $\frac{7}{4}$.

a) $\int_0^2 f(x)dx \in [2, 4]$.

b) Sachant que l'aire, en ua, grisée sur la figure est égale à l'aire, en ua, du rectangle OHKL, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 3]$ est : $\bar{f} = \frac{21}{4}$.



2. Si $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin t \cdot \cos 3t \, dt$ alors $I = 0$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $A(a)$ et $a \in \mathbb{C}^*$ l'écriture complexe de :

a) la symétrie orthogonale d'axe (OA) est : $z' = \frac{a}{\bar{a}} \bar{z}$.

b) L'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ est : $z' = a \bar{a} z$.

c) la similitude indirecte de centre O, de rapport 2 et d'axe (OA) est : $z' = -2 \frac{a}{\bar{a}} \bar{z}$.

Exercice 2 - (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée f' .

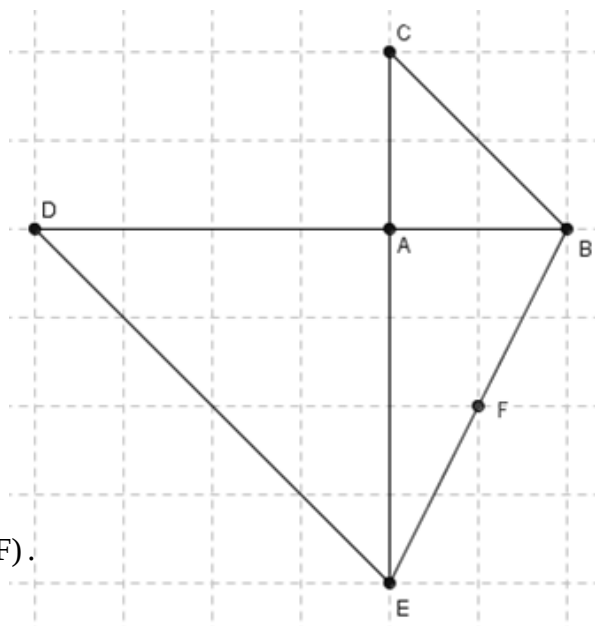
b) En déduire que pour tout x de I , $f(x) = \int_0^x \cos^2 t \, dt$

c) Expliciter $f(x)$ pour tout x de I puis calculer l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale, $B = \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{(1+x^2)^3}$

Exercice 3 - (6 points)

Dans la figure ci contre, ABC et ADE sont deux triangles isocèles et rectangle tels que : $AB = 1$,
 $AD = 2$, $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{AD, AE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
 On note F le milieu du segment [BE].



1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et D en A.
 - a) Préciser le rapport et l'angle de f .
 - b) Déterminer les images par f des droites (CD) et (AF).
 - c) Déterminer et construire le centre I de f .
2. Soit $g = S_A \circ f^{-1}$ où S_A désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ) la médiatrice du segment [BC].
 - a) Déterminer $g(C)$ et $g(A)$.
 - b) Prouver que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
 - c) Soit G le symétrique de A par rapport à C. Montrer $g(G) = G$.
 - d) Caractériser g .

Exercice 4 - (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation : $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

1. a) Prouver que $(\mathcal{C})$ est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.
 b) Tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.
2. Soit E le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.
 - a) Ecrire une équation de la tangente (T) en E à $(\mathcal{C})$.
 - b) La droite (T) coupe les asymptotes de $(\mathcal{C})$ en G et H. Prouver que E est le milieu de [GH].
3. Calculer le volume, en unité de volume, engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AE}$ de la courbe $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses où A est un sommet de $(\mathcal{C})$.

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) Vrai ; b) Faux
2. Vrai
3. a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux

Exercice 2 :

1. a) Soit u la fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $u(x) = \tan x$.

- ✓ u est dérivable sur I
- ✓ Pour tout x de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan x \in \mathbb{R}$ donc $u(I) = \mathbb{R}$
- ✓ La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc f est dérivable sur I et pour tout x de I ,

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{(1+(u(x))^2)^2} = \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x.$$

- b) Comme $f(0) = \int_0^0 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 0$ alors f est la primitive sur $1+\tan^2 x$ de la fonction $t \mapsto \cos^2 t$

qui s'annule en 0. Par suite, pour tout x de I , $f(x) = \int_0^x \cos^2 t \, dt$.

- c) Pour tout x de I , $f(x) = \int_0^x \cos^2 t \, dt = \int_0^x \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$.

Il en résulte que $A = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\tan \frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

2. Soit $B = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$

On pose :

$$u(x) = x$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^3} \quad v(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{4(1+x^2)^2}$$

Corrigé

On obtient :
$$B = \left[-\frac{x}{4(1+x^2)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4}A = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{32}.$$

Exercice 3 :

1. a) Le rapport de f est $\frac{CA}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}.$

On a : $(\widehat{AD, CA}) \equiv (\widehat{AD, AE})[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{AD, CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc l'angle de f est $\frac{\pi}{2}.$

b) $f((CD))$ est la perpendiculaire à la droite (CD) passant par $f(D) = A$

et $f((AF))$ est la perpendiculaire à la droite (AF) passant par $f(A) = C.$

Montrons que (CD) et (AF) sont perpendiculaires :

On a : F est milieu de [BE] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

donc
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(-2 - 0 + 0 - (2)) = 0 \end{aligned}$$

Par suite, les droites (CD) et (AF) sont perpendiculaires.

Il en résulte : $f((CD)) = (AF)$ et $f((AF)) = (CD).$

c) Désignons par J le point d'intersection des droites (CD) et (AF),

$$\{f(J)\} = f((CD)) \cap f((AF)) = (AF) \cap (CD) = \{J\}.$$

Ainsi, J est un point fixe de f donc $I = J.$

2. a) $g(C) = S_A \circ f^{-1}(C) = S_A(A) = A$ et $g(A) = S_A \circ f^{-1}(A) = S_A(D) = E.$

b) g est la composée d'une similitude indirecte de rapport 1 et d'une similitude directe de rapport 2 donc g est une similitude indirecte de rapport 2.

c) Désignons par G' l'image de G par g,

G est le symétrique de A par rapport à C $\Leftrightarrow$ C est le milieu du segment [AG]

$$\Leftrightarrow A \text{ est le milieu du segment } g([AG]) = [EG']$$

Or A est le milieu du segment [EG] donc $G' = G.$

Ainsi, $g(G) = G.$

d) G est une similitude indirecte de centre G et de rapport 2.

Corrigé

Comme $g(A) = E$ et $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GA}$ alors l'axe de g est la droite **(AE)**.

Exercice 4 :

$$1. \quad x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - y^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

On pose $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On obtient $(\mathcal{C}) : \frac{X^2}{\frac{9}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

Donc $(\mathcal{C})$ est une hyperbole **équilatère** de centre $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et d'axe focal $(I, \vec{i}) = (O, \vec{i})$ avec

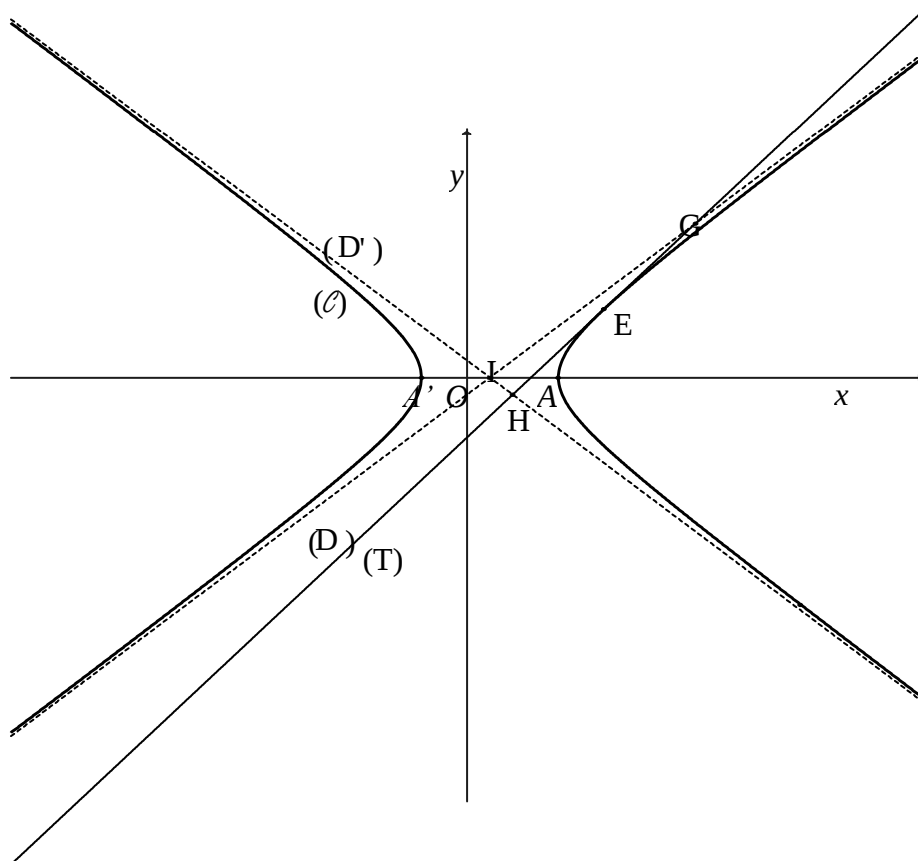
$$a^2 = b^2 = \frac{9}{4} \quad \text{et} \quad c = a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Sommets	$A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et $A'\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	$A(2, 0)$ et $A'(-1, 0)$
Foyers	$F\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ et $F'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$F\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

b) Les asymptotes de $(\mathcal{C})$:

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Asymptotes	$D : Y = X$ et $D' : Y = -X$	$D : y = x - \frac{1}{2}$ et $D' : y = -x + \frac{1}{2}$

Corrigé



2. a) Pour $x = 3$, $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$ devient $y^2 = 4$ donc $E(3, 2)$.

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Point E	$E\left(\frac{5}{2}, 2\right)$	$E(3, 2)$
Tangente (T)	$T: \frac{\frac{5}{2}X}{\frac{9}{4}} - \frac{2Y}{\frac{9}{4}} = 1$ $\Leftrightarrow T: \frac{10}{9}X - \frac{8}{9}Y = 1$ $\Leftrightarrow T: 10X - 8Y - 9 = 0$	$T: 10\left(x - \frac{1}{2}\right) - 8y - 9 = 0$ $\Leftrightarrow T: 10x - 8y - 14 = 0$ $\Leftrightarrow T: 5x - 8y - 7 = 0$

b) $T \cap D = \left\{ G\left(5, \frac{9}{2}\right) \right\}$ et $T \cap D' = \left\{ H\left(1, -\frac{1}{2}\right) \right\}$ donc le milieu de [GH] a pour coordonnées $(3, 2)$ donc E est le milieu du segment [GH].

3. Le volume, en uv, engendré par rotation de l'arc $\widehat{AE}$ de l'hyperbole (C) autour de l'axe des

$$\text{abscisses est : } V = \pi \int_2^3 y^2 dx = \pi \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \frac{11\pi}{6}$$